Zur
Theorie des logarithmischen Potentials.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT LEIPZIG

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Carl Meyer
aus Ottensen.

Berlin
Verlag von R. Trenkel.
1909.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren Hölder und Neumann.

Leipzig, den 29. April 1909.

Der Procancellar.
Köster.

Druck von C. Schulze & Co., G. m. b. H., Gräfenhainichen.

Meiner Mutter gewidmet.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Das logarithmische Flächenpotential 8

1. Die Definition des Potentials und seine Stetigkeit 8
2. Die ersten Derivierten des Potentials 15
3. Die zweiten Derivierten des Potentials und die Poissonsche Gleichung 19
4. Die Stetigkeit der zweiten Derivierten 30

II. Das logarithmische Kurvenpotential 34

1. Die mit Masse belegte Kurve 34
2. Die Definition des Potentials 38
3. Die Stetigkeit des Potentials 41
4. Die ersten Derivierten des Potentials in den Punkten der Kurve 49
   a) Der Fall der Geraden 50
   b) Der allgemeine Fall 53
5. Die ersten Derivierten des Potentials in den Endpunkten . 62
   a) Der Fall der Geraden 62
   b) Der allgemeine Fall 65

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546804_0127

In seiner Dissertation „Beiträge zur Potentialtheorie“ (Stuttgart 1882) hat O. Hölder es unternommen, für die Dichte der Massenbelegung möglichst allgemeine Bedingungen aufzustellen, unter denen sich die fundamentalen Sätze über die Ableitungen des Newtonschen Potentials strenge beweisen lassen. Schon C. Neumann (Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Leipzig 1877), von dem die entsprechenden Sätze über das logarithmische Potential herrühren, hat auf die große Analogie hingewiesen, die zwischen den Theorien der beiden Potentiale besteht. Sie berechtigt von vornherein zu der Annahme, daß sich die Entwicklungen jener Dissertation auf das Gebiet des logarithmischen Potentials übertragen lassen. Im folgenden soll nun diese Übertragung wirklich ausgeführt und zugleich der Geltungsbereich der Sätze erweitert werden.

I.

Das logarithmische Flächenpotential.

1. Die Definition des Potentials und seine Stetigkeit.

Man versteht unter dem logarithmischen Potential einer über einen Bereich $\mathfrak{B}$ der Ebene ausgebreiteten Masse auf den Punkt (x, y) der Ebene das Integral

$$u = \int_{\mathfrak{B}} k \log \frac{1}{r} d\tau.$$

Hier ist k die Dichte der Massenbelegung an der Stelle (a, b) des Flächenelementes $d\tau$ und r der Abstand des Punktes (x, y) von $d\tau$, also

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

Die Integration erstreckt sich über alle Flächenelemente des Bereiches $\mathfrak{B}$.

Für die späteren Entwicklungen ist es notwendig, diese Definition bestimmter auszusprechen:

Wir wollen unter einem ebenen Bereich ein endliches, zweidimensionales Kontinuum verstehen, d. h. eine in der Ebene definierte Punktmenge von den folgenden Eigenschaften (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II B 1 S. 9 f.):

1. Sämtliche Punkte befinden sich im Endlichen. Die zu ihnen gehörigen Werte der Koordinaten liegen also zwischen endlichen Grenzen.

2. Um jeden Punkt läßt sich ein Kreis so beschreiben, daß alle Punkte seiner Fläche auch Punkte der Menge sind.

3. Zwei beliebige Punkte der Menge lassen sich durch einen aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzten Linienzug verbinden, dessen sämtliche Punkte der Menge angehören (zusammenhängende Punktmenge).

Wegen der zweiten Eigenschaft ist jeder Punkt der Menge zugleich Häufungsstelle. Diejenigen Punkte der Ebene, die, ohne der Menge selbst anzugehören, Häufungsstellen sind, bilden die sog. Begrenzung oder den Rand des Bereiches, während man die vorher definierten Punkte innere Punkte nennt. Jeder Punkt, der weder zu diesen noch zu den Randpunkten gehört, heißt äußerer Punkt.

Im folgenden sollen die Punkte der Begrenzung eine besondere Eigenschaft haben:

Es soll möglich sein, alle diese Punkte durch gerade Linien in eine endliche Anzahl ebener Gebiete einzuschließen, deren Flächensumme — wie sie nach den Lehren der Geometrie bestimmt wird — beliebig klein gemacht werden kann. Die Randpunkte sollen also ein Punktsystem bilden, dessen Analogon auf der geraden Linie Harnack (Mathemat. Annalen, Bd. 19, S. 238) als diskret bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung können wir von einem Inhalt oder, besser gesagt, von einer Flächengrenze (O. Stolz, Math. Annalen, Bd. 23, S. 154) des Bereiches $\mathfrak{B}$ sprechen: Schließen wir nämlich den Bereich durch gerade Linien ein und zerlegen wir das so erhaltene Gebiet in gewöhnliche Polygone, so strebt die Flächensumme derjenigen Polygone, die Punkte des Bereiches enthalten, wenn wir sie nach den beiden Dimensionen der Ebene unendlich klein werden lassen, einem endlichen, von der Art der Einschließung und Teilung unabhängigen Grenzwert zu, und diesen Grenzwert sprechen wir eben als Inhalt des Bereiches $\mathfrak{B}$ an.

Um das über einen Bereich $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral einer Funktion f zu definieren, zerlegen wir $\mathfrak{B}$ in Teilbereiche $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., $\mathfrak{B}_n$. Diese sollen dieselben Eigenschaften haben wie $\mathfrak{B}$ selbst, so daß jedem von ihnen ein Inhalt in dem vorher angegebenen Sinne zukommt. Das Wort „zerlegen“ ist so zu verstehen: Keiner der inneren Punkte eines Teilbereiches darf zugleich unter den inneren Punkten eines anderen vorkommen,

die Teilbereiche enthalten nur Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$, und jeder Punkt von $\mathfrak{B}$ kommt unter den inneren Punkten oder unter den Randpunkten der $\mathfrak{B}_i$ vor.

Es sei f eine Funktion, die für jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$ einen bestimmten endlichen Wert hat. Wir multiplizieren den Inhalt $\Delta\tau_i$ eines jeden Teilbereiches $\mathfrak{B}_i$ mit dem Wert f_i, den f in irgendeinem Punkte im Innern oder auf dem Rande von $\mathfrak{B}_i$ annimmt, und bilden die Summe dieser Produkte für alle Teilbereiche von $\mathfrak{B}$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i \Delta\tau_i.$$

Wir nennen die Funktion f in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ integrierbar, wenn es eine bestimmte endliche Größe S von dieser Beschaffenheit gibt: Zu einem beliebig klein vorgegebenen, positiven ε läßt sich stets ein positives δ so finden, daß für jede Zerlegung des Bereiches $\mathfrak{B}$ in Teilbereiche $\mathfrak{B}_i$, deren Durchmesser (Jordan, Cours d'Analyse, 2. éd., Bd. I, S. 28) kleiner als δ ist,

$$\left| S - \sum_{i=1}^{i=n} f_i \Delta\tau_i \right| < \varepsilon$$

wird. S nennen wir dann das über den Bereich $\mathfrak{B}$ der Ebene erstreckte Integral der Funktion f und schreiben:

$$S = \int_{\mathfrak{B}} f d\tau.$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz des Integrals ist die folgende Bedingung:

Zu einer beliebig klein vorgegebenen, positiven Zahl ε läßt sich eine Einteilung des Bereiches von der Art finden, daß, wenn σ_i die Schwankung der Funktion im Teilbereiche $\mathfrak{B}_i$ bedeutet,

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i \Delta\tau_i \right| < \varepsilon$$

wird. Danach ist jede Funktion integrierbar, die im Innern und am Rande des Integrationsbereiches stetig ist (Jordan, Cours d'Analyse, 2. éd., Bd. I, S. 54). Ferner ist das Produkt zweier integrierbarer Funktionen ebenfalls integrierbar.

Setzen wir voraus, daß die Dichte k der Massenbelegung eine in dem ebenen Bereich $\mathfrak{B}$ integrierbare Funktion des Ortes ist, so existiert tatsächlich das logarithmische Potential

$$u = \int_{\mathfrak{B}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau$$

der über $\mathfrak{B}$ ausgebreiteten Masse auf jeden Punkt (x, y) der Ebene, der außerhalb der Massen, also weder im Innern noch auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ liegt. Denn für solche Punkte ist:

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}$$

bestimmt, endlich und stetig.

Liegt aber der Punkt (x, y) auf der Begrenzung oder im Innern von $\mathfrak{B}$, so wird $\log \frac{1}{r}$ in diesem Punkte unendlich groß. In diesem Falle bedarf es einer neuen Definition des Integrals:

Fällt (x, y) mit einem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ zusammen, so grenzen wir um diesen Punkt einen Bereich $\mathfrak{B}'$ ab, der innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ liegt, und integrieren zunächst über den außerhalb $\mathfrak{B}'$ gelegenen Teil von $\mathfrak{B}$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$.

$$\int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} k \log \frac{1}{r} \, d\tau$$

Nähert sich der Wert dieses Integrals, während der Inhalt von $\mathfrak{B}'$ nach irgendeinem Gesetze gegen Null konvergiert, stets einem und demselben Grenzwert, so sprechen wir diesen als Wert des sog. uneigentlichen Integrals

$$u = \int_{\mathfrak{B}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau$$

an.

Liegt der Punkt (x, y) auf der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{B}$, so pflegt man bei der Definition des Integrals zunächst einen innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegenen Bereich abzugrenzen und läßt diesen sich dem Bereich $\mathfrak{B}$ unbegrenzt nähern. Um aber bei den späteren Entwicklungen nicht immer die beiden erwähnten Fälle

einzeln behandeln zu müssen, schließen wir den gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$ in einen anderen Bereich ein und legen der Funktion k in allen Punkten dieses letzten Bereiches, die nicht auch zu $\mathfrak{B}$ gehören, den Wert Null bei. Dann lassen sich die im folgenden für innere Punkte angestellten Betrachtungen ohne weiteres auf die Randpunkte übertragen.

Die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$u = \int_{\mathfrak{B}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau$$

ist bewiesen, wenn wir folgendes gezeigt haben: Zu jeder beliebig klein vorgegebenen, positiven Zahl ε läßt sich ein positives ϱ so bestimmen, daß für jeden Bereich $\mathfrak{b}$, der innerhalb des mit ϱ um den Punkt (x, y) beschriebenen Kreises liegt und den Punkt (x, y) weder im Innern noch auf dem Rande enthält,

$$\left| \int_{\mathfrak{b}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau \right| < \varepsilon$$

wird. Da

$$\left| \int_{\mathfrak{b}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau \right| \leq \int_{\mathfrak{b}} |k| \cdot \left| \log \frac{1}{r} \right| d\tau \leq K \int_{\mathfrak{b}} \left| \log \frac{1}{r} \right| d\tau$$

ist, wenn K die obere Grenze von $|k|$ in dem Bereich $\mathfrak{B}$ bedeutet, so haben wir nur das Integral

$$\int_{\mathfrak{b}} \left| \log \frac{1}{r} \right| d\tau$$

zu untersuchen.

Wir beschreiben um den Punkt (x, y) zwei innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegene Kreise mit den Radien ϱ und ϱ' ($\varrho' < \varrho$) und bezeichnen die beiden Kreisflächen mit $\mathfrak{K}(\varrho)$ und $\mathfrak{K}(\varrho')$. ϱ wählen wir so klein, daß in $\mathfrak{K}(\varrho)$ $r < 1$ ist. In dem über den Kreisring $\mathfrak{K}(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho')$ erstreckten Integral von $\log \frac{1}{r}$ dürfen wir Polarkoordinaten einführen:

$$a = x + r \cos \varphi, \quad b = y + r \sin \varphi.$$

Dann ist

$$\int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)-\mathfrak{K}(\varrho')} \log\frac{1}{r}\,d\tau = \int\limits_{\varrho'}^{\varrho} r\log\frac{1}{r}\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi < 2\pi M(\varrho-\varrho'),$$

wo M das Maximum von $\left| r\log\frac{1}{r}\right|$ für alle Punkte (x, y), die auf dem Rande oder im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen, bedeutet. Dies Maximum existiert tatsächlich, da $\mathfrak{B}$ ganz im Endlichen liegt und $\lim\limits_{r=0}\left(r\log\frac{1}{r}\right)=0$ ist. Es ist also für jedes ϱ', das der Ungleichung

$$0<\varrho'<\varrho$$

genügt,

$$\int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)-\mathfrak{K}(\varrho')} \log\frac{1}{r}\,d\tau < 2\pi M\varrho$$

und daher

$$\lim_{\varrho'=0} \int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)-\mathfrak{K}(\varrho')} \log\frac{1}{r}\,d\tau \leqq 2\pi M\varrho$$

Danach können wir, wenn wir nur ϱ hinreichend klein wählen, erreichen, daß:

$$\lim_{\varrho'=0} \int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)-\mathfrak{K}(\varrho')} \log\frac{1}{r}\,d\tau < \varepsilon$$

wird $(0<\varrho'<\varrho,\ \varepsilon>0)$. Bedeutet nun $\mathfrak{b}$ einen Bereich, der ganz innerhalb $\mathfrak{K}(\varrho)$ liegt und (x, y) weder im Innern noch auf dem Rande enthält, so ist:

$$\int\limits_{\mathfrak{b}} \log\frac{1}{r}\,d\tau < \lim_{\varrho'=0} \int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)-\mathfrak{K}(\varrho')} \log\frac{1}{r}\,d\tau < \varepsilon$$

Es existiert daher das uneigentliche Integral

$$u = \int\limits_{\mathfrak{B}} k\log\frac{1}{r}\,d\tau.$$

Damit ist die Existenz des logarithmischen Flächenpotentials für jeden Punkt der Ebene nachgewiesen.

Aus den letzten Entwicklungen ergibt sich ohne weiteres noch dies: Bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε läßt sich ein ϱ so bestimmen, daß für irgendeinen Punkt (x, y) auf der Begrenzung oder im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$

$$\left| \int_{\mathfrak{K}(\varrho)} k \log \frac{1}{r} \, d\tau \right| < \varepsilon$$

ist, vorausgesetzt, daß der Punkt (x, y) Mittelpunkt von $\mathfrak{K}(\varrho)$ ist. Dann wird aber auch für irgendein Gebiet $\mathfrak{b}$, das innerhalb des mit ϱ um den Punkt (x, y) beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}(\varrho)$ liegt,

$$\left| \int_{\mathfrak{b}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau \right| < \varepsilon,$$

und dabei darf $\mathfrak{b}$ den Punkt (x, y) in seinem Innern oder auf dem Rande enthalten.

Schlage ich nun um einen Punkt (x_0, y_0) von $\mathfrak{B}$ einen Kreis $\mathfrak{K}_0(\varrho_0)$, dessen Radius $\varrho_0 < \frac{\varrho}{2}$ ist, so ist der Beitrag dieses Kreises zu dem Potential von $\mathfrak{B}$ in bezug auf irgendeinen Punkt der Kreisfläche $\mathfrak{K}_0(\varrho_0)$ kleiner als ε.

Diese Tatsache kann man benutzen, um nachzuweisen, daß das logarithmische Potential in jedem Punkte des Bereiches und auf seinem Rande stetig ist. Daß es außerhalb der Massen stetig ist, ist ohne weiteres klar.

Wir beschreiben um den Punkt (x_0, y_0), in dem das Potential untersucht werden soll, einen Kreis mit dem Radius ϱ. Nennen wir das Potential der Kreisfläche $\mathfrak{K}_0(\varrho)$ auf (x_0, y_0) u_0' und das von $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(\varrho)$ u_0'', die entsprechenden Potentiale auf den Punkt (x, y) u′ und u″, so ist

$$u_0 - u = u_0' - u' + u_0'' - u''$$

und

$$|u_0 - u| \leq |u_0'| + |u'| + |u_0'' - u''|.$$

Nun können wir nach dem eben Bewiesenen ϱ so bestimmen, daß

$$|u_0'| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ und } |u'| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird (ε ist eine beliebig kleine, positive Zahl), wenn nur (x, y) innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}_0(\varrho)$ liegt. Andererseits läßt sich, nachdem wir ϱ so gewählt haben, $|u_0'' - u''|$ dadurch kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ machen, daß wir den Abstand des Punktes (x, y) von (x_0, y_0) hinreichend klein wählen. Denn das logarithmische Potential ist außerhalb der Massen stetig.

Das logarithmische Flächenpotential ist also als Funktion von x und y in jedem Punkt der Ebene stetig.

Da es in dem Bereich $\mathfrak{B}$ mit Einschluß seiner Grenzen stetig ist, so ist es in diesem Bereich gleichmäßig stetig, hat dort ein endliches Maximum und Minimum und nimmt jeden Wert zwischen irgend zwei Werten, die ihm in $\mathfrak{B}$ zukommen, ebenfalls in $\mathfrak{B}$ an. (Enzyklop. d. math. Wiss. II A 1 S. 47.)

2. Die ersten Derivierten des Potentials.

Das logarithmische Potential besitzt außerhalb der Massen überall partielle Derivierte erster Ordnung nach x und y, und zwar erhalten wir diese durch Differentiation von

$$\int_{\mathfrak{B}} k \log \frac{1}{r} \, d\tau$$

unter dem Integralzeichen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{\mathfrak{B}} k \frac{a - x}{r^2} \, d\tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{\mathfrak{B}} k \frac{b - y}{r^2} \, d\tau$$

Diese Gleichungen bestehen auch dann noch, wenn der Punkt im Innern der Massen liegt. Nur darf man in diesem Falle nicht unter dem Integralzeichen differenzieren.

Setzen wir

$$r_0 = \sqrt{(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2}$$

und

$$r = \sqrt{(a - x_0 - \Delta x)^2 + (b - y_0)^2},$$

so ist

$$\frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}=\int_{\mathfrak{B}}\frac{k}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r}-\log\frac{1}{r_0}\right)d\tau$$

$$=-\int_{\mathfrak{B}}\frac{k}{\Delta x}(\log r-\log r_0)\,d\tau.$$

Wir nehmen zunächst an, es sei $r>r_0$. Dann ist in der Gleichung

$$r=r_0+\Delta r$$

$\Delta r>0$.

Für $r_0>0$ und $\Delta r>0$ ist:

$$\log(r_0+\Delta r)-\log r_0=$$

$$=2\left[\frac{\Delta r}{2r_0+\Delta r}+\frac{(\Delta r)^3}{3(2r_0+\Delta r)^3}+\frac{(\Delta r)^5}{5(2r_0+\Delta r)^5}+\cdots\right]$$

$$<2\left[\frac{\Delta r}{2r_0+\Delta r}+\left(\frac{\Delta r}{2r_0+\Delta r}\right)^2+\left(\frac{\Delta r}{2r_0+\Delta r}\right)^3+\cdots\right]$$

$$<2\,\frac{\dfrac{\Delta r}{2r_0+\Delta r}}{1-\dfrac{\Delta r}{2r_0+\Delta r}}=\frac{\Delta r}{r_0}.$$

Da in einem Dreieck die Differenz zweier Seiten nie größer ist als die dritte Seite, so ist

$$|\Delta x|\geq\Delta r$$

und daher

$$\left|\frac{\log(r_0+\Delta r)-\log r_0}{\Delta x}\right|<\frac{1}{r_0}.$$

Es ist also

$$\left|\frac{1}{\Delta x}(\log r-\log r_0)\right|<\frac{1}{r_0},\ \text{wenn}\ 0<r_0<r\ \text{ist},$$

und

$$\left|\frac{1}{\Delta x}(\log r-\log r_0)\right|<\frac{1}{r},\ \text{wenn}\ 0<r<r_0\ \text{ist},$$

folglich für beliebige positive r_0 und r und für beliebiges Δx

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r}-\log\frac{1}{r_0}\right)\right|<\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}.$$

Da ferner die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{\mathfrak{B}}\frac{d\tau}{r} \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{B}}\frac{d\tau}{r_0}$$

existieren, so besteht für beliebiges Δx die Ungleichung:

$$\left|\int_{\mathfrak{B}}\frac{k}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r}-\log\frac{1}{r_0}\right)d\tau\right|<K\int_{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right)d\tau,$$

wo K wieder das Maximum von $|k|$ in dem Bereich $\mathfrak{B}$ bedeutet.

Wir denken uns jetzt um den Punkt (x_0, y_0) den Kreis mit dem Radius ϱ beschrieben, über dessen Größe wir nachher verfügen. Jedenfalls ist, da auch das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathfrak{B}}k\frac{a-x_0}{r_0^2}\,d\tau$$

existiert.

$$\left|\int_{\mathfrak{B}}k\frac{a-x_0}{r_0^2}\,d\tau-\frac{u(x_0+\Delta x,\ y_0)-u(x_0,\ y_0)}{\Delta x}\right|\leqq$$

$$\leqq\left|\int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(\varrho)}k\frac{a-x_0}{r_0^2}\,d\tau-\int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(\varrho)}\frac{k}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r}-\log\frac{1}{r_0}\right)d\tau\right|+$$

$$+\left|\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)}k\frac{a-x_0}{r_0^2}\,d\tau\right|+\left|\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)}\frac{k}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r}-\log\frac{1}{r_0}\right)d\tau\right|.$$

Hier können wir ϱ so bestimmen, daß bei beliebigem Δx der absolute Betrag des dritten Integrals und der des vierten — wegen der vorher entwickelten Ungleichung — kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ werden. Haben wir ϱ so gewählt, so können wir den Variabilitätsbereich von Δx so abgrenzen, daß für diesen

$$\left| \int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(\varrho)} k \frac{a-x_0}{{r_0}^2}\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{k}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r} - \log\frac{1}{r_0}\right) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Denn für den Bereich $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(\varrho)$ ist (x_0, y_0) ein äußerer Punkt und für einen solchen gilt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{1}{\Delta x}\left(\log\frac{1}{r} - \log\frac{1}{r_0}\right)\right] = \frac{a-x_0}{{r_0}^2}.$$

Es ist also möglich, bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε ein $\sigma > 0$ so zu finden, daß für alle $|\Delta x| < \sigma$:

$$\left| \int_{\mathfrak{B}} k \frac{a-x_0}{{r_0}^2}\, d\tau - \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \right| < \varepsilon$$

wird.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Zeigt man nun noch, daß die partiellen Derivierten von u überall in der Ebene stetig sind — dies kann in derselben Weise wie beim Potential selbst geschehen —, so darf man auf die Gültigkeit der Gleichung

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

schließen, wo α und β mit Δx und Δy gegen Null konvergieren (Genocchi-Peano, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, Leipzig 1899, S. 129; O. Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttgart 1882, S. 68). und kann dann die Gleichung für den Differentialquotienten des logarithmischen Flächenpotentials nach irgendeiner Richtung s herleiten:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(s, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(s, x).$$

Es gilt also der folgende Satz:

Das logarithmische Flächenpotential besitzt in jedem Punkte der Ebene stetige Differentialquotienten

erster Ordnung. Sein Differentialquotient nach irgendeiner Richtung s in der Ebene genügt der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(s, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(s, x).$$

3. Die zweiten Derivierten des Potentials und die Poissonsche Gleichung.

Auch die partiellen Derivierten zweiter Ordnung von u erhält man durch Differentiation unter dem Integralzeichen nur dann, wenn der betreffende Punkt außerhalb der Massen liegt. Für einen solchen Punkt gelten also die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{\mathfrak{B}} k\left(\frac{2(a-x)^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right) d\tau$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \int_{\mathfrak{B}} k\left(\frac{2(b-y)^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right) d\tau$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (Laplacesche Gleichung).}$$

Diese Gleichungen sind allgemein nicht mehr richtig für einen Punkt im Innern der Massen. Die Integrale, die in den beiden ersten Gleichungen auf der rechten Seite stehen, existieren im allgemeinen nicht mehr für die Punkte im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{B}$. Wir wollen daher dies voraussetzen, wenn (x_0, y_0) der Punkt ist, in dem wir das Potential untersuchen:

Das Integral

$$\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} d\tau,$$

wo $\mathfrak{K}_0(\varrho)$ den Kreis um den Punkt (x_0, y_0) mit dem Radius ϱ bedeutet und

$$r_0 = \sqrt{(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2},\quad k = k(a, b),\quad k_0 = k(x_0, y_0)$$

ist, existiert und wird mit verschwindendem ϱ wie eine beliebige

positive Potenz von ϱ Null. Es gibt also zwei positive Konstanten c und α, so daß für irgendein positives ϱ

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} \, d\tau \right| < c\varrho^{\alpha}$$

ist.

Die Bedingung, die wir damit der Dichte k der Massenbelegung auferlegt haben, und die u. a. die Stetigkeit von k im Punkte (x_0, y_0) verlangt, ist z. B. in dem folgenden Falle erfüllt:

Es gibt $(n+2)$ positive Zahlen A, μ, ν_1, ν_2, . . ., ν_n von der Beschaffenheit, daß für alle Punkte (a, b) des Bereiches $\mathfrak{B}$ in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0)

$$|k - k_0| < A r_0^{\mu} \cdot |\log r_0|^{\nu_1} \cdot |\log^2 r_0|^{\nu_2} \cdot \quad . \quad . \; |\log^n r_0|^{\nu_n}$$

ist, wenn

$$\log^2 r_0 = \log(|\log r_0|) \text{ usw. ist.}$$

Für $n = 0$ lautet die Ungleichung

$$|k - k_0| < A r_0^{\mu}.$$

Das ist die Voraussetzung, von der O. Hölder bei seinen Untersuchungen ausgeht.

Auch jetzt noch haben die oben genannten Integrale keinen bestimmten Sinn. Der Grenzwert, den sie darstellen, ist von der Gestalt des Bereiches $\mathfrak{B}'$, den wir um (x_0, y_0) abgrenzen, abhängig. Wir wählen eine Kreisfläche $\mathfrak{K}_0(\varrho)$ um (x_0, y_0) als Mittelpunkt und lassen ϱ gegen Null konvergieren. Dann nähern sich unter der angegebenen Voraussetzung

$$\int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(\varrho)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(\varrho)} k \left(\frac{2(b - y_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau$$

bestimmten endlichen Grenzwerten.

Dies beweisen wir mit Hilfe des folgenden Satzes (Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Größe, deutsch bearbeitet von Lüroth und Schepp, Leipzig 1892, S. 38):

Damit die Werte irgendeiner Funktion $f(z)$ bei z_0 auf der Seite des größeren Arguments einen bestimmten und endlichen Grenzwert haben, dazu ist es notwendig und hinreichend, daß für jede beliebig kleine und positive Zahl σ eine positive Zahl ε von der Art existiere, daß

$$|f(z_0 + \varepsilon) - f(z_0 + \varepsilon')| < \sigma$$

sei, wenn $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ist.

Wir müssen also, um die Existenz des ersten Grenzwertes nachzuweisen, zeigen, daß bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε ein ϱ so gefunden werden kann, daß für alle ϱ', die der Ungleichung

$$0 < \varrho' < \varrho$$

genügen,

$$\int_{\mathfrak{K}_1(\varrho) - \mathfrak{K}_1(\varrho')} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau$$

wird.

Setzen wir in diesem Integral

$$k = k_0 + (k - k_0),$$

so läßt es sich als Summe zweier Integrale darstellen:

$$k_0 \int_{\mathfrak{K}_1(\varrho) - \mathfrak{K}_1(\varrho')} \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau + \int_{\mathfrak{K}_1(\varrho) - \mathfrak{K}_1(\varrho')} (k - k_0) \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau$$

Der erste Teil geht durch die Substitution

$$a = x_0 + r_0 \cos\varphi$$

über in das zweifache Integral

$$k_0 \int_{\varrho'}^{\varrho} \frac{dr}{r_0} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi$$

Dies ist aber für beliebige positive ϱ und ϱ' Null, da

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi = 0$$

ist.

Der absolute Betrag des zweiten Integrals ist wegen

$$\frac{|a - x_0|}{r_0} < 1$$

kleiner als

$$\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}_0(\varrho')} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} \, d\tau,$$

kann also wegen der Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} \, d\tau$$

dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man ϱ hinreichend klein wählt.

Um nun die Existenz der beiden Ableitungen zweiter Ordnung unter der auf S. 19 gemachten Voraussetzung zu beweisen, setzen wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{\mathfrak{B}} k \frac{a - x}{r^2} \, d\tau = u_1 \ (x, \ y).$$

Dann wird

$$\frac{u_1(x_0 + \Delta x, y_0) - u_1(x_0, y_0)}{\Delta x} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{k}{\Delta x} \left[(a - x_0) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) - \frac{\Delta x}{r^2} \right] d\tau,$$

wenn wir wieder

$$r_0^2 = (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2$$

und

$$r^2 = (a - x_0 - \Delta x)^2 + (b - y_0)^2 = r_0^2 - 2\Delta x(a - x_0) + \Delta x^2$$

setzen.

Wir beschreiben sowohl um (x_0, y_0) wie um $(x_0 + \Delta x, y_0)$ einen Kreis mit dem Radius ϱ, wobei ϱ so gewählt wird, daß der eine Kreis ganz außerhalb des anderen liegt. Außerdem beschreiben wir um (x_0, y_0) einen Kreis mit einem solchen Radius R, daß die beiden ersten Kreise in diesem liegen. Bezeichnen wir die drei Kreisflächen mit $\mathfrak{K}_0(\varrho)$, $\mathfrak{K}(\varrho)$ und $\mathfrak{K}_0(R)$, so zerfällt der Bereich $\mathfrak{B}$ in die vier Teile:

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R), \ \mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho), \ \mathfrak{K}_0(\varrho) \text{ und } \mathfrak{K}(\varrho).$$

Setzen wir schließlich noch

$$D(k) = k\left[(a - x_0)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) - \frac{\Delta x}{r^2}\right],$$

so ist

$$\frac{u_1(x_0 + \Delta x, y_0) - u_1(x_0, y_0)}{\Delta x} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{D(k)}{\Delta x}\, d\tau$$

und

$$D(k_0) = k_0\left[(a - x_0)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) - \frac{\Delta x}{r^2}\right]$$

Für die späteren Betrachtungen ist die folgende für beliebiges Δx gültige Gleichung wichtig:

$$\int_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k_0)}{\Delta x}\, d\tau = -\pi k_0$$

Wir benutzen nun zunächst die identische Gleichung

$$\frac{u_1(x_0 + \Delta x, y_0) - u_1(x_0, y_0)}{\Delta x} = \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)} k\left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2}\right) d\tau +$$

$$+ \left[\int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k)}{\Delta x}\, d\tau - \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)} k\left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2}\right) d\tau\right] + \int_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k)}{\Delta x}\, d\tau$$

und untersuchen den in der eckigen Klammer stehenden Ausdruck. Es ist

$$r^2 = r_0^2 - 2\,\Delta x\,(a - x_0) + \Delta x^2 = r_0^2\left(1 - 2\,\frac{\Delta x}{r_0}\cdot\frac{a - x_0}{r_0} + \left(\frac{\Delta x}{r_0}\right)^2\right),$$

also

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\,\frac{\Delta x}{r_0}\cdot\frac{a - x_0}{r_0} + \left(\frac{\Delta x}{r_0}\right)^2\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{r_0^2}\left[1 + \frac{\Delta x}{r_0}\left(-\frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0}\right)\right]^{-1}$$

In dem Bereich $\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)$ ist

$$\frac{|\Delta x|}{r_0} \leq \frac{|\Delta x|}{R} < 1,$$

außerdem ist

$$\frac{|a - x_0|}{r_0} < 1,$$

also besteht dort sicher die Ungleichung

$$\left| \frac{\Delta x}{r_0} \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right) \right| < 3 \frac{|\Delta x|}{R}$$

Wir können daher, indem wir $\frac{|\Delta x|}{R} < \frac{1}{3}$ wählen, den Betrag der linken Seite kleiner als Eins machen und dann auf

$$\left[1 + \frac{\Delta x}{r_0} \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right) \right]^{-1}$$

den binomischen Satz anwenden. Danach wird

$$\left[1 + \frac{\Delta x}{r_0} \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right) \right]^{-1} = 1 - \frac{\Delta x}{r_0} \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta x}{r_0} \right)^2 \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{r_0} \right)^3 \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2(a - x_0)}{r_0} \cdot \frac{\Delta x}{r_0} +$$

$$+ \left(\frac{\Delta x}{r_0} \right)^2 \left[-1 + \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right)^2 - \frac{\Delta x}{r_0} \left(- \frac{2(a - x_0)}{r_0} + \frac{\Delta x}{r_0} \right)^3 + \cdots \right]$$

und

$$(a - x_0) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = \frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} \Delta x + c \frac{a - x_0}{r_0^4} \Delta x^2,$$

wo $|c|$ unter einer bestimmten Grenze C bleibt, wenn $\frac{|\Delta x|}{R}$ unter einem gewissen Betrage gehalten wird. Somit ist

$$\frac{D(k)}{\Delta x} = \frac{2k(a - x_0)^2}{r_0^4} + c\,k \frac{a - x_0}{r_0} \cdot \frac{\Delta x}{r_0^3}$$

$$- \frac{k}{r_0^2} - \frac{2k(a - x_0)}{r_0} \cdot \frac{\Delta x}{r_0^3} - c\,k \frac{\Delta x}{r_0} \frac{\Delta x}{r_0^3}$$

Bezeichnet K das Maximum von $|k|$ im Bereich $\mathfrak{B}$, so ist wegen $\frac{|a-x_0|}{r_0} \leqq 1$

$$\left|\frac{D(k)}{\Delta x} - k\left(\frac{2(a-x_0)^2}{{r_0}^4} - \frac{1}{{r_0}^2}\right)\right| < 2K(1+C)\frac{|\Delta x|}{{r_0}^3} < 2K(1+C)\frac{|\Delta x|}{R^3}$$

Aus dieser Ungleichung folgt

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k)}{\Delta x}\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(R)} k\left(\frac{2(a-x_0)^2}{{r_0}^4} - \frac{1}{{r_0}^2}\right) d\tau\right| < c_1 \frac{|\Delta x|}{R^3},$$

wo c_1 eine positive Größe bedeutet, die von Δx, R und ϱ ganz unabhängig ist.

$\int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k)}{\Delta x}\,d\tau$ untersuchen wir nicht direkt, sondern betrachten zunächst die Differenz.

$$\int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k)}{\Delta x}\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k_0)}{\Delta x}\,d\tau = \int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)} \left(\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x}\right) d\tau,$$

indem wir das letzte Integral entsprechend den drei Gebieten $\mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho)$, $\mathfrak{K}_0(\varrho)$ und $\mathfrak{K}(\varrho)$ in drei Teile zerlegen. Wir setzen also

$$\int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k)}{\Delta x}\,d\tau = \int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{D(k_0)}{\Delta x}\,d\tau + \int\limits_{\mathfrak{K}_0(R)-\mathfrak{K}_0(\varrho)-\mathfrak{K}(\varrho)} \left(\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x}\right) d\tau + \int\limits_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{D(k)}{\Delta x}\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)} \frac{D(k)}{\Delta x}\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{D(k_0)}{\Delta x}\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{K}(\varrho)} \frac{D(k_0)}{\Delta x}\,d\tau.$$

Das erste Integral der rechten Seite hat den Wert $(-\pi k_0)$ für jedes Δx. Um das zweite Integral zu untersuchen, schreiben wir für

$$\frac{a-x_0}{\Delta x}\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{{r_0}^2}\right) - \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{(a-x_0)\,({r_0}^2 - r^2)}{\Delta x \cdot r^2 \cdot {r_0}^2} - \frac{1}{r^2}$$

oder, da

$$r_0^2 - r^2 = 2\,\Delta x\,(a - x_0) - \Delta x^2$$

ist,

$$\frac{2\,(a - x_0)^2 - \Delta x\,(a - x_0)}{r^2 \cdot r_0^2} - \frac{1}{r^2}$$

Dann ist:

$$\left|\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x}\right| < \frac{|k - k_0|}{r^2}\left[2\left(\frac{a - x_0}{r_0}\right)^2 + \frac{|a - x_0|}{r_0}\cdot\frac{\Delta x}{r_0} + 1\right]$$

und wegen

$$\frac{|a - x_0|}{r_0} \leqq 1$$

$$\left|\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x}\right| < \frac{|k - k_0|}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\cdot\left(3 + \frac{|\Delta x|}{r_0}\right).$$

Da r_0, r uud Δx die Seiten eines Dreiecks sind, so ist

$$r + |\Delta x| \geq r_0$$

oder

$$1 + \frac{|\Delta x|}{r} \geqq \frac{r_0}{r}$$

und, weil im Gebiet $\mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho)$

$$r_0 \geq \varrho \text{ und } r \geqq \varrho$$ ist,

$$\frac{r_0}{r} \leqq 1 + \frac{|\Delta x|}{\varrho} \text{ und } \frac{|\Delta x|}{r_0} \leqq \frac{|\Delta x|}{\varrho}$$

Folglich ist

$$\left|\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x}\right| < \frac{k - k_0}{r_0^2}\left(1 + \frac{|\Delta x|}{\varrho}\right)^2\cdot\left(3 + \frac{|\Delta x|}{\varrho}\right)$$

Wir werden nachher ϱ in Abhängigkeit von $|\Delta x|$ sich so verändern lassen, daß $\frac{|\Delta x|}{\varrho}$, wenn $|\Delta x|$ gegen Null konvergiert, über alle Grenzen wächst. Denken wir uns diesen Prozeß so weit vorgeschritten, daß $\frac{|\Delta x|}{\varrho} > 3$ ist, so folgt:

$$\left| \frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x} \right| < 8 \frac{|k - k_0|}{r_0^2} \left(\frac{|\Delta x|}{\varrho} \right)^3$$

und

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho)} \left(\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x} \right) d\tau \right| < 8 \left(\frac{|\Delta x|}{\varrho} \right)^3 \int_{\mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho)} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} d\tau.$$

Hier ist

$$\int_{\mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho)} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} d\tau < \int_{\mathfrak{K}_0(R)} \frac{|k - k_0|}{r_0^2} d\tau < c R^\alpha.$$

Es ist also

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0(R) - \mathfrak{K}_0(\varrho) - \mathfrak{K}(\varrho)} \left(\frac{D(k)}{\Delta x} - \frac{D(k_0)}{\Delta x} \right) d\tau \right| < c_2 \cdot R^\alpha \left(\frac{|\Delta x|}{\varrho} \right)^3,$$

wo c_2 dieselben Eigenschaften wie c_1 hat. Dabei muß $\frac{|\Delta x|}{\varrho} > 3$ sein.

Es sind nun noch die vier letzten Integrale in der Gleichung auf S. 25 zu untersuchen.

Es ist

$$\frac{D(k)}{\Delta x} = \frac{k}{\Delta x} \left(\frac{a - x_0 - \Delta x}{r^2} - \frac{a - x_0}{r_0^2} \right),$$

also wegen $\frac{|a - x_0 - \Delta x|}{r} \leqq 1$ und $\frac{|a - x_0|}{r_0} \leqq 1$

$$\frac{|D(k)|}{|\Delta x|} \leqq \frac{K}{|\Delta x|} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right),$$

wo K das Maximum von $|k|$ bedeutet. Da ferner

$$\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{d\tau}{r_0} = \int_{\mathfrak{K}(\varrho)} \frac{d\tau}{r} = 2\pi\varrho$$

und

$$\int_{\mathfrak{K}(\varrho)} \frac{d\tau}{r_0} = \int_{\mathfrak{K}_1(\varrho)} \frac{d\tau}{r} < 2\pi\varrho$$

ist, so ist die Summe aus den Beträgen der vier genannten Integrale kleiner als $c_3 \cdot \frac{\varrho}{|\Delta x|}$. Dabei gilt auch von c_3 dasselbe wie von c_1.

Bis jetzt haben wir folgendes gezeigt:

Haben die drei Kreise $\mathfrak{K}_0(\varrho)$, $\mathfrak{K}(\varrho)$, $\mathfrak{K}_0(R)$ zueinander die auf S. 22 näher bezeichnete Lage, wird ferner $\frac{|\Delta x|}{R}$ unter einem gewissen Betrage gehalten (S. 24) und ist $\frac{|\Delta x|}{\varrho} > 3$ (S. 27), so ist (siehe die Gleichung S. 23):

$$\left| \frac{u_1(x_0+\Delta x, y_0) - u_1(x_0, y_0)}{\Delta x} - \left[\lim_{R=0} \int_{\mathfrak{B}-\mathfrak{K}_0(R)} k \left(\frac{2(a-x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau - \pi k_0 \right] \right|$$

$$< \varepsilon + c_1 \frac{|\Delta x|}{R^3} + c_2 R^\alpha \left(\frac{|\Delta x|}{\varrho} \right)^3 + c_3 \frac{\varrho}{|\Delta x|}.$$

Hier konvergiert die allein von R abhängige Größe ε mit R gegen Null, während c_1, c_2, c_3 von R, Δx und ϱ unabhängige, positive Größen sind.

Nun können wir R und ϱ in der Weise von $|\Delta x|$ abhängig machen, daß

$$\frac{|\Delta x|}{R^3}, \quad R^\alpha \left(\frac{|\Delta x|}{\varrho} \right)^3, \quad \frac{\varrho}{|\Delta x|}$$

mit $|\Delta x|$ gegen Null konvergieren. Wir haben nur zu jedem Δx die zugehörigen Werte von R und ϱ nach den Gleichungen

$$R = \left| \sqrt[4]{|\Delta x|} \right|, \quad \varrho = |\Delta x|^{1+\frac{\alpha}{4n}} \; (n > 3)$$

zu bestimmen. Dann ist auch, wenn wir $|\Delta x|$ unter einer gewissen Grenze halten, die Lage der Kreise $\mathfrak{K}_0(\varrho)$, $\mathfrak{K}(\varrho)$,

$\mathfrak{K}_0(R)$ die verlangte. Natürlich konvergiert ebenfalls ε mit $|\Delta x|$ gegen Null. Die letzte Ungleichung ergibt nun:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{u_1(x_0 + \Delta x,\ y_0) - u_1(x_0,\ y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{R = 0} \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau - \pi k_0.$$

Es gilt also dieser Satz:

Die Dichte k der Massenbelegung eines ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ sei in diesem Bereiche integrierbar. Ferner möge das Integral

$$\int_{\mathfrak{K}_0(\varrho)} \frac{|k(a,\ b) - k(x_0,\ y_0)|}{r_0^2}\, d\tau,$$

wo $\mathfrak{K}_0(\varrho)$ den Kreis um den Punkt (x_0, y_0) mit dem Radius ϱ bedeutet und

$$r_0^2 = (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2$$

ist, existieren und mit verschwindendem ϱ wie eine beliebige positive Potenz von ϱ Null werden. Dann hat das logarithmische Potential des Bereiches im Punkte (x_0, y_0) partielle Differentialquotienten zweiter Ordnung, und zwar ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{R = 0} \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau - \pi k(x_0,\ y_0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lim_{R = 0} \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R)} k \left(\frac{2(b - y_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau - \pi k(x_0,\ y_0)$$

und daher

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi k(x_0,\ y_0)$$

(Poissonsche Gleichung).

Dieser Satz erlaubt uns nur dann, auf die Existenz der zweiten Differentialquotienten in einem Randpunkte des Bereiches zu schließen, wenn die Dichte k bei der Annäherung an den Punkt in ganz bestimmter Weise Null wird.

4. Die Stetigkeit der zweiten Derivierten.

Wir beweisen jetzt die Stetigkeit der zweiten Differentialquotienten, allerdings indem wir der Dichte k noch eine weitere Bedingung auferlegen.

Setzen wir

$$u_{11}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$r_0^2 = (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2$ und $r_0'^2 = (a - x_0 - \Delta x)^2 + (b - y_0 - \Delta y)^2$

und bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_0'(R_1)$ die Fläche des Kreises mit dem Radius R_1 um den Punkt $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, so ist:

$$\begin{aligned} u_{11}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u_{11}(x_0, y_0) = \\ = \lim_{R_1 = 0} \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0'(R_1)} k \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) d\tau \\ - \lim_{R_1 = 0} \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R_1)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau \\ - \pi \Big(k(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - k(x_0, y_0) \Big). \end{aligned}$$

Schlagen wir um die Punkte (x_0, y_0) und $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ außerdem einen Kreis mit einem Radius $R_2 > R_1$, so können wir für $u_{11}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u_{11}(x_0, y_0)$ setzen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0'(R_2)} k \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) d\tau - \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R_2)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau \\ + \lim_{R_1 = 0} \int_{\mathfrak{K}_0'(R_2) - \mathfrak{K}_0'(R_1)} k \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) d\tau - \lim_{R_1 = 0} \int_{\mathfrak{K}_0(R_2) - \mathfrak{K}_0(R_1)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau \\ - \pi \Big(k(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - k(x_0, y_0) \Big) \end{aligned}$$

Für alle Punkte $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ in einer gewissen Umgebung von $(x_0,\ y_0)$ soll nun das Integral

$$\int_{\mathfrak{K}_0'(\varrho)} \frac{|k(a,\ b) - k(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)|}{r_0'^2}\, d\tau$$

existieren und

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0'(\varrho)} \frac{|k(a,\ b) - k(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)|}{r_0'^2}\, d\tau \right| < C\varrho^{\alpha}$$

sein, wo C und α von Δx und Δy unabhängige, positive Größen sind.

Setzen wir

$$k_0 = k(x_0,\ y_0),\ k_0' = k(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y),$$
$$\text{und } k = k_0' + (k - k_0') \text{ resp. } k = k_0 + (k - k_0),$$

so wird

$$\int_{\mathfrak{K}_0'(R_2) - \mathfrak{K}_0'(R_1)} k\left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2}\right) d\tau - k_0' \int_{\mathfrak{K}_0'(R_2) - \mathfrak{K}_0'(R_1)} \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2}\right) d\tau +$$
$$+ \int_{\mathfrak{K}_0'(R_2) - \mathfrak{K}_0'(R_1)} (k - k_0') \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2}\right) d\tau$$

und

$$\int_{\mathfrak{K}_0(R_2) - \mathfrak{K}_0(R_1)} k\left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2}\right) d\tau - k_0 \int_{\mathfrak{K}_0(R_2) - \mathfrak{K}_0(R_1)} \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2}\right) d\tau +$$
$$+ \int_{\mathfrak{K}_0(R_2) - \mathfrak{K}_0(R_1)} (k - k_0) \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2}\right) d\tau$$

Die beiden Integrale, die in den beiden letzten Gleichungen auf der rechten Seite an erster Stelle stehen, sind für beliebige Δx, Δy, R_1, R_2 Null. Da wir annehmen dürfen, daß die Kreise $\mathfrak{K}_0(R_2)$ und $\mathfrak{K}_0'(R_2)$ dem Gebiet angehören, in dem die von uns gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, da außerdem

$$\frac{|a - x_0|}{r_0} \leqq 1 \text{ und } \frac{|a - x_0 - \Delta x|}{r_0'} \leqq 1$$

ist, so folgt:

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0'(R_2) - \mathfrak{K}_0'(R_1)} k \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) d\tau \right| < C \cdot R_2''$$

und

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0(R_2) - \mathfrak{K}_0(R_1)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau \right| < C \cdot R_2''$$

Wir können also einen Wert von R_2 finden, so daß für dieses R_2 und jedes R_1, das der Bedingung $0 < R_1 < R_2$ genügt, die beiden letzten Integrale dem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine positive Größe werden, und zwar für beliebige Δx und Δy. Dasselbe gilt dann von den beiden Grenzwerten, die in der Differenz $u_{11}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u_{11}(x_0, y_0)$ auftreten.

Wir müssen nun, nachdem wir R_2 festgelegt haben, die Differenz

$$\int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0'(R_2)} k \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) d\tau - \int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0(R_2)} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau$$

untersuchen. Ist $\mathfrak{k}_0$ das Stück, das aus $\mathfrak{K}_0(R_2)$ durch den Kreis um $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ mit R_2 herausgeschnitten wird, $\mathfrak{k}_0'$ das entsprechende Stück von $\mathfrak{K}_0'(R_2)$, so zerlegen wir die Differenz so:

$$\int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{K}_0 - \mathfrak{k}_0} k \left| \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) - \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right| d\tau$$

$$- \int_{\mathfrak{k}_0'} k \left(\frac{2(a - x_0 - \Delta x)^2}{r_0'^4} - \frac{1}{r_0'^2} \right) d\tau + \int_{\mathfrak{k}_0} k \left(\frac{2(a - x_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^2} \right) d\tau.$$

Der Satz von der Stetigkeit der zweiten Ableitungen des logarithmischen Potentials außerhalb des mit der Masse belegten Bereiches läßt sich auf das erste Integral nicht anwenden, da sich das Integrationsgebiet mit Δx und Δy ändert. Es läßt

sich aber leicht direkt zeigen, daß man den Betrag jenes Integrals sowie den des zweiten und dritten beliebig klein machen kann, wenn man nur $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ hinreichend klein wählt. Da die Dichte k im Punkte (x_0, y_0) sicher stetig ist, so haben wir folgenden Satz bewiesen:

Die Dichte k der Massenbelegung genüge den in dem Satz S. 29 angegebenen Bedingungen. Ferner existiere das Integral

$$\int_{\mathfrak{K}_0'(\varrho)} \frac{|k(a, b) - k(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)|}{r_0'^2} \, d\tau$$

für alle Punkte $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0), und schließlich sei

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_0'(\varrho)} \frac{|k(a, b) - k(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)|}{r_0'^2} \, d\tau \right| < C \varrho^{\alpha},$$

wo C und α von Δx und Δy unabhängige, positive Größen sind. Dann sind die zweiten Derivierten des logarithmischen Potentials des Bereiches $\mathfrak{B}$ im Punkte (x_0, y_0) stetig.

II.

Das logarithmische Kurvenpotential.

1. Die mit Masse belegte Kurve.

Ist die Masse auf einer ebenen Kurve $\mathfrak{C}$ ausgebreitet, so definiert man das logarithmische Potential dieser Masse auf den Punkt (x, y) der Ebene durch das Integral

$$u = \int_{\mathfrak{C}} k \log \frac{1}{r} \, ds,$$

wo sich die Integration über alle Elemente ds der Kurve $\mathfrak{C}$ erstreckt und k und r dieselbe Bedeutung haben wie beim Flächenpotential. Auch hier setzen wir für die Untersuchungen besondere Verhältnisse voraus.

Die Kurve, auf der die Masse ausgebreitet ist, sei eine einfache, glatte Kurve (Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. I, Leipzig 1907, S. 122):

Wir stellen sie dar durch zwei Gleichungen von der Form

$$a = \varphi(t), \quad b = \psi(t),$$

wo t alle Werte von T_1 bis T_2, die Grenzen eingeschlossen, durchläuft. In dem Intervall (T_1, T_2) sollen φ und ψ für jeden Wert von t nicht nur einen bestimmten endlichen Wert haben, sondern auch stetig sein. Außerdem soll die Kurve überall eine Tangente besitzen, die sich stetig dreht, d. h. für $T_1 \leq t \leq T_2$ sollen die Derivierten

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad \psi'(t) = \frac{d\psi}{dt}$$

bestimmt, endlich und stetig sein und nie zugleich verschwinden. Es ist also für die genannten Werte von t:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 > 0.$$

Schließlich setzen wir voraus, daß je zwei verschiedenen Werten von t zwei verschiedene Punkte (a, b) der Ebene entsprechen. Es besteht dann zwischen den Werten der Größe t und den Punkten der Kurve eine eineindeutige Beziehung.

Wir definieren zunächst die Länge einer ebenen Kurve:

Wir verstehen mit Study (Mathemat. Annalen Bd. 47, S. 314) unter einem Sehnenpolygon der Kurve jedes zwischen den Endpunkten

$$\left(\varphi(T_1),\ \psi(T_1)\right) \text{ und } \left(\varphi(T_2),\ \psi(T_2)\right)$$

ausgespannte, geradlinige Polygon, dessen Seiten eine endliche Anzahl von aufeinander folgenden, zu wachsenden Werten von t gehörigen Punkten der Kurve verbinden. Es möge nun eine Zahl S von dieser Beschaffenheit geben: Bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε läßt sich ein $\sigma > 0$ so finden, daß in jedem Sehnenpolygon, dessen Seiten kleiner als σ sind, die Summe L der Seitenlängen die Ungleichung

$$|S - L| < \varepsilon$$

erfüllt. Dann nennen wir S die Länge der Kurve.

In diesem Sinne hat die von uns betrachtete Kurve eine bestimmte Länge. Dies könnte man ohne weiteres aus den Untersuchungen von L. Scheeffer (Acta mathematica, Bd. 5, S. 49ff.) schließen. Doch wollen wir an dieser Stelle einen Beweis angeben, der zwar die hier vorliegenden Verhältnisse voraussetzt, aber um einiges einfacher ist.

Wir vergleichen den absoluten Betrag $|\Delta t|$ der Differenz zweier Werte t und $(t + \Delta t)$ mit der Entfernung Δr der entsprechenden Kurvenpunkte (a, b) und $(a + \Delta a,\ b + \Delta b)$:

Nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung ist

$$\Delta a = \Delta t \cdot \varphi'(t + \Theta_1 \cdot \Delta t) \qquad (0 < \Theta_1 < 1)$$

und

$$\Delta b = \Delta t \cdot \psi'(t + \Theta_2 \cdot \Delta t) \qquad (0 < \Theta_2 < 1)$$

Da $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ in dem Intervall (T_1, T_2) stetig sind, so folgt:

$$\Delta a = \Delta t \cdot (\varphi'(t) + \varepsilon_1)$$

und

$$\Delta b = \Delta t \cdot (\psi'(t) + \varepsilon_2),$$

wo sich bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven σ ein positives τ so finden läßt, daß für alle t und $(t + \Delta t)$ des Intervalls (T_1, T_2), die der Bedingung $|\Delta t| < \tau$ genügen, $|\varepsilon_1| < \sigma$ und $|\varepsilon_2| < \sigma$ wird.

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$(\Delta r)^2 = (\Delta t)^2 \left[(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varphi'(t) + 2\,\varepsilon_2\,\psi'(t) + \varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} \right]$$

oder, da in dem Intervall (T_1, T_2) stets

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$$

ist,

$$(\Delta r)^2 = (\Delta t)^2 \cdot \left[(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \right] \cdot \left[1 + \frac{2\,\varepsilon_1\,\varphi'(t) + 2\,\varepsilon_2\,\psi'(t) + \varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2}}{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \right]$$

$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2$ ist im Intervall (T_1, T_2) stetig. Der Wert, der die untere Grenze für die Werte dieser Funktion in dem Intervall darstellt, wird also von der Funktion wirklich angenommen. Dann muß sie wegen der letzten Ungleichung ein von Null verschiedenes Minimum haben. In der Gleichung

$$(\Delta r)^2 = (\Delta t)^2 \cdot (q(t))^2 \cdot (1 + \varepsilon),$$

wo

$$q(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

ist, gilt daher von $|\varepsilon|$ dasselbe wie von $|\varepsilon_1|$ und $|\varepsilon_2|$. Dabei bedeutet $q(t)$ einen der beiden Werte, den die Funktion

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

an den Enden des Intervalls $(t, t + \Delta t)$ annimmt. Aus der Stetigkeit von $q(t)$ folgt, daß auch diese Gleichung gilt:

$$\Delta r = |\Delta t| \cdot q(t) \cdot (1 + e),$$

wo nun q(t) irgendein Wert von

$$\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

im Intervall $(t, t + \Delta t)$ ist und $|e|$ dieselbe Eigenschaft hat wie $|\varepsilon_1|$ und $|\varepsilon_2|$.

Wir teilen jetzt das Intervall (T_1, T_2) in beliebig viele, etwa n Teilintervalle $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$. Die Entfernungen der den Endpunkten entsprechenden Kurvenpunkte seien $\Delta r_1, \Delta r_2, \ldots, \Delta r_n$. Dann ist

$$\Delta r_i = \Delta t_i \cdot q(t_i) \cdot (1 + e_i)$$

und

$$\sum_1^n \Delta r_i = \sum_1^n \Delta t_i \cdot q(t_i) \cdot (1 + e_i).$$

Ist e die obere Grenze der $|e_i|$ im Intervall (T_1, T_2), so ist

$$(1 - e) \sum_1^n q(t_i) \cdot \Delta t_i < \sum_1^n \Delta r_i < (1 + e) \sum_1^n q(t_i) \cdot \Delta t_i,$$

wo wir nun e durch geeignete Wahl der Ausdehnung der Teilintervalle beliebig klein machen können. Da ferner die Funktion q(t) in dem Intervall (T_1, T_2) stetig ist, so existiert das Integral

$$\int_{T_1}^{T_2} q(t)\, dt,$$

und es ist

$$\int_{T_1}^{T_2} q(t)\, dt - \varepsilon < \sum_1^n q(t_i) \cdot \Delta t_i < \int_{T_1}^{T_2} q(t)\, dt + \varepsilon,$$

wo von ε dasselbe gilt wie von e.

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt, daß man die Summe $\sum_1^n \Delta r_i$ dem Integral $\int_{T_1}^{T_2} q(t)\, dt$ dadurch beliebig nahe bringen kann, daß man die Ausdehnung der Δt_i hinreichend klein wählt. Nun können wir aber wegen der Gleichung

$$\Delta r > \text{const.} |\Delta t|,$$

die sich aus der Gleichung

$$(\Delta r)^2 = (\Delta t)^2 \cdot (q(t))^2 \cdot (1 + \varepsilon)$$

ergibt, bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven σ eine positive Größe Δr so bestimmen, daß für zwei beliebige Kurvenpunkte, deren Entfernung kleiner als Δr ist, die Differenz der entsprechenden Werte von t dem absoluten Betrage nach kleiner als σ wird. Deshalb können wir die Differenz

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} q(t)\,dt - \sum_{1}^{n} \Delta r_i \right|$$

dadurch beliebig klein machen, daß wir die Δr_i, die Seiten des Sehnenpolygons, unter einer bestimmten Größe halten. Es hat also die Kurve in dem früher angegebenen Sinne die Länge

$$S = \int_{T_1}^{T_2} q(t)\,dt$$

Die Länge eines Kurvenstücks mit den Endpunkten

$$(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \text{ und } (\varphi(t_2), \psi(t_2)) \qquad (t_2 > t_1)$$

ist durch das Integral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$$

gegeben.

2. Die Definition des Potentials.

Es sei f(a, b) eine Funktion, die für jeden Punkt der Kurve einen bestimmten endlichen Wert hat. Wir zerlegen die Kurve wie bei der Konstruktion eines Sehnenpolygons in n Teile, multiplizieren die Länge Δs_i jedes Teils mit einem der Werte f_i, die von f(a, b) auf dem zugehörigen Kurvenstück angenommen werden, und summieren alle so erhaltenen Produkte, bilden also:

$$\sum_{1}^{n} f_i \cdot \Delta s_i .$$

Dabei ist

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} q(t)\,dt = q(t_i') \cdot \Delta t_i ,$$

wo t_i' im allgemeinen ein ganz bestimmter Wert von t ist, der der Ungleichung

$$t_{i-1} \leqq t_i' \leqq t_i$$

genügt, somit

$$\sum_1^n f_i \cdot \Delta s_i = \sum_1^n f_i \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i .$$

Bezeichnet δf_i die Schwankung der Funktion f(a, b) im Intervall Δt_i, so ist

$$\left| f_i - f(\varphi(t_i'), \psi(t_i')) \right| \leqq \delta f_i$$

und

$$\left| f_i \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i - f(\varphi(t_i'), \psi(t_i')) \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i \right| \leqq q(t_i') \cdot \delta f_i \cdot \Delta t_i ,$$

daher

$$\left| \sum_1^n f_i \cdot \Delta s_i - \sum_1^n f(\varphi(t_i'), \psi(t_i')) \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i \right| \leqq \sum_1^n q(t_i') \cdot \delta f_i \cdot \Delta t_i$$

$$\leqq Q \cdot \sum_1^n \delta f_i \, \Delta t_i ,$$

wenn Q das Maximum von q(t) bedeutet,
oder:

$$\sum_1^n f(\varphi(t_i'), \psi(t_i')) \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i - Q \sum_1^n \delta f_i \cdot \Delta t_i \leqq \sum_1^n f_i \, \Delta s_i \leqq$$

$$\leqq \sum_1^n f(\varphi(t_i'), \psi(t_i')) \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i + Q \sum_1^n \delta f_i \cdot \Delta t_i .$$

Setzen wir voraus, daß f(a, b), als Funktion von t betrachtet, von T_1 bis T_2 integrierbar ist, so konvergiert, während die Δt_i unbegrenzt abnehmen,

$$\sum_1^n f(\varphi(t_i'), \psi(t_i')) \cdot q(t_i') \cdot \Delta t_i$$

gegen

$$\int_{T_1}^{T_2} f\,q\,dt$$

und $\sum_1^n \delta f_i \cdot \Delta t_i$ gegen Null. Da ferner aus den Gleichungen

$$\Delta s_i = q(t_i') \cdot \Delta t_i \text{ und } q(t) \neq 0$$

$$\Delta t_i \leqq \text{const.}\, \Delta s_i$$

folgt, so können wir bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε ein $\Delta s > 0$ so finden, daß, wenn wir nur die Länge Δs_i der einzelnen Kurvenstücke kleiner als Δs wählen,

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} f\, q\, dt - \sum_1^n f_i \cdot \Delta s_i \right| < \varepsilon$$

ist. Bezeichnen wir den Grenzwert der Summe mit $\int_{\mathfrak{C}} f\, ds$, so ist:

$$\int_{\mathfrak{C}} f\, ds = \int_{T_1}^{T_2} f\, q\, dt.$$

Wir setzen voraus, daß die Dichte k der Massenbelegung der Kurve als Funktion von t im Intervall (T_1, T_2) integrierbar ist. Dann existiert das Integral

$$\int_{\mathfrak{C}} k \log \frac{1}{r}\, ds.$$

für alle Punkte außerhalb der Kurve, da für diese in dem Intervall (T_1, T_2) $\log \frac{1}{r}$ überall bestimmt, endlich und stetig ist. Es ist:

$$\int_{\mathfrak{C}} k \log \frac{1}{r}\, ds = \int_{T_1}^{T_2} k\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \cdot \log \frac{1}{\sqrt{\left(\varphi(t) - x\right)^2 + \left(\psi(t) - y\right)^2}} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Fällt der Punkt (x, y) mit dem Kurvenpunkte

$$a_0 = \varphi(t_0),\ b_0 = \psi(t_0)$$

zusammen, so verstehen wir unter dem logarithmischen Potential der Kurve in diesem Punkte

$$\int_{T_1}^{T_2} k\,q \log \frac{1}{r}\,dt = \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_{T_1}^{t_0-\varepsilon_1} k\,q \log \frac{1}{r}\,dt + \lim_{\varepsilon_2 = 0} \int_{t_0+\varepsilon_2}^{T_2} k\,q \log \frac{1}{r}\,dt,$$

wo ε_1 und ε_2 kleine positive Größen bedeuten, die bei dem Grenzprozeß unabhängig voneinander gegen Null konvergieren.

Die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite sind bestimmt und endlich, denn es ist für $t = t_0$

$$k\,q \log \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} k\,q \left\{ \log \left[\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right)^2 + \left(\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \right)^2 \right] + \log (t - t_0)^2 \right\}$$

und

$$\lim_{t = t_0} \left[\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right)^2 + \left(\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \right)^2 \right] = (q(t_0))^2 > 0.$$

3. Die Stetigkeit des Potentials.

In jedem Punkte außerhalb der Kurve ist das Potential eine stetige Funktion von x und y. Wir zeigen nun, daß sich das Potential auch dann, wenn (x, y) die Kurve selbst durchläuft, stetig ändert, und zwar in ähnlicher Weise wie beim Flächenpotential.

Wir betrachten das Integral

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} k \cdot q \cdot \log \left[(\varphi(t) - \varphi(t'))^2 + (\psi(t) - \psi(t'))^2 \right] dt,$$

wo

$$\varepsilon > 0, \quad T_1 < t_0 - \varepsilon, \quad t_0 + \varepsilon < T_2, \quad t_0 - \varepsilon < t' < t_0 + \varepsilon$$

sein soll, und ersetzen es wieder durch die Summe

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} k\,q \log \left[\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(t')}{t - t'} \right)^2 + \left(\frac{\psi(t) - \psi(t')}{t - t'} \right)^2 \right] dt + \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} k\,q \log (t - t')^2\,dt.$$

Das erste Integral können wir als ein eigentliches auffassen, wenn wir den Funktionen

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'} \quad \text{und} \quad \frac{\psi(t)-\psi(t')}{t-t'}$$

für $t=t'$ die Werte $\varphi'(t')$ und $\psi'(t')$ beilegen.

Es ist ferner

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}=\varphi'(t'+\Theta(t-t')) \quad (0<\Theta<1),$$

also

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}=\varphi'(t')+\delta,$$

wo wir wegen der Stetigkeit des Differentialquotienten $|\delta|$ durch geeignete Wahl von $|t-t'|$ für alle t' des Intervalls (T_1, T_2) beliebig klein machen können. Analoges gilt von

$$\frac{\psi(t)-\psi(t')}{t-t'}.$$

Wir können also bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven e ein $\sigma>0$ so finden, daß für $|t-t'|<\sigma$ und alle t' des Intervalls (T_1, T_2)

$$\big(q(t')\big)^2-e<\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}\right)^2+\left(\frac{\psi(t)-\psi(t')}{t-t'}\right)^2<\big(q(t')\big)^2+e$$

ist.

Sind m und Q Minimum und Maximum von $q(t)$, so folgt für hinreichend kleine $|t-t'|$:

$$\frac{m^2}{2}<\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}\right)^2+\left(\frac{\psi(t)-\psi(t')}{t-t'}\right)^2<2Q^2$$

und

$$\left|k\,q\log\left[\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}\right)^2+\left(\frac{\psi(t)-\psi(t')}{t-t'}\right)^2\right]\right|<K\cdot Q\cdot L,$$

wo K das Maximum von $|k|$ und L den größeren der beiden Werte $\left|\log\left(\frac{m^2}{2}\right)\right|$ und $|\log(2Q^2)|$ bedeutet. Dann ist für hinreichend kleine ε

$$\left|\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} k\,q \log\left[\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t')}{t-t'}\right)^2+\left(\frac{\psi(t)-\psi(t')}{t-t'}\right)^2\right]dt\right| < K\cdot Q\cdot L\cdot \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} dt$$

$$< 2\,K\,Q\cdot L\cdot\varepsilon.$$

Die rechte Seite können wir durch geeignete Wahl von ε beliebig klein machen. Außerdem ist

$$\left|\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} k\,q \log(t-t')^2\,dt\right| < K\,Q\left(\left|\int_0^{t'-t_0+\varepsilon} \log\tau^2\,d\tau\right|+\left|\int_0^{t_0-t'+\varepsilon} \log\tau^2\,d\tau\right|\right)$$

Wählen wir ε hinreichend klein, so können wir den Betrag der beiden Integrale für jedes t' des Intervalls $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ beliebig klein machen.

Nach diesen Entwicklungen können wir um den Punkt $C_0(a_0, b_0)$ der Kurve ein Stück so abgrenzen, daß der Beitrag dieses Kurvenstücks zu dem Potential der Kurve auf jeden Punkt des abgegrenzten Kurvenstücks dem absoluten Betrage nach unter einer beliebig kleinen Grenze liegt. Der Punkt (a_0, b_0) darf natürlich auch ein Endpunkt der Kurve sein. Daraus schließt man dann ähnlich wie beim Flächenpotential (Seite 14 f.), daß sich das Potential bei der Bewegung des Punktes (x, y) auf der Kurve stetig ändert.

Daß das Potential sich auch dann stetig ändert, wenn der Punkt $P(x, y)$ von außen in den Punkt $C_0(a_0, b_0)$ der Kurve rückt, zeigen wir zunächst für den Fall, daß dieser Punkt ein innerer Punkt der Kurve ist, also nicht mit einem der Kurvenendpunkte zusammenfällt.

Ist $P(x, y)$ irgendein Punkt der Ebene, der nicht auf der Kurve liegt, so hat seine Entfernung r von den Punkten $C(a, b)$ der Kurve ein von Null verschiedenes Minimum, denn

$$r^2 = (\varphi(t) - x)^2 + (\psi(t) - y)^2$$

ist eine stetige Funktion von t. Liegt $P(x, y)$ innerhalb eines Kreises um den Kurvenpunkt $C_0(a_0, b_0)$ mit ϱ als Radius, so muß die Entfernung des Punktes C', für den r ein Minimum wird, (es können auch mehrere Punkte sein) von $C_0(a_0, b_0)$

kleiner als 2ϱ sein. Wir können deshalb dadurch, daß wir den Punkt $P(x, y)$ hinreichend nahe bei $C_0(a_0, b_0)$ annehmen, erreichen, daß der Punkt C' innerhalb einer vorgeschriebenen Umgebung von C_0 liegt und nicht in einen Endpunkt der Kurve fällt. Sind die Koordinaten des Punktes C'

$$a' = \varphi(t'),\ b' = \psi(t'),$$

so dürfen wir also annehmen, daß $T_1 < t' < T_2$ ist für alle Punkte P in einer gewissen Umgebung von C_0. Da ferner $\frac{d(r^2)}{dt}$ in dem Intervall (T_1, T_2) überall einen bestimmten endlichen Wert hat, so muß

$$\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)_{t=t'} = 2\left[(\varphi(t') - x)\,\varphi'(t') + (\psi(t') - y)\,\psi'(t')\right] = 0$$

sein, d. h. der Punkt $P(x, y)$ liegt auf der Normalen der Kurve im Punkte C'.

Es ist, wenn wir $(t - t') = \tau$ setzen,

$$\varphi(t) - \varphi(t') = \tau \cdot \varphi'(t' + \Theta\tau),\ (0 < \Theta < 1),$$

und wegen der Stetigkeit von $\varphi'(t)$ im Intervall (T_1, T_2):

$$\varphi(t) - \varphi(t') = \tau \cdot (\varphi'(t') + \varepsilon_1),$$

wo wir bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε ein $\tau_0 > 0$ so finden können, daß für alle Wertepaare t. t' des Intervalls (T_1, T_2), die die Bedingung

$$|\tau| = |t - t'| < \tau_0$$

erfüllen, $|\varepsilon_1| < \varepsilon$ wird. Dasselbe gilt von ε_2 in der Gleichung

$$\psi(t) - \psi(t') = \tau\,(\psi'(t') + \varepsilon_2).$$

Nun ist

$$r^2 = (\varphi(t) - x)^2 + (\psi(t) - y)^2$$
$$= \left[(\varphi(t') - x) + (\varphi(t) - \varphi(t'))\right]^2 + \left[(\psi(t') - y) + (\psi(t) - \psi(t'))\right]^2$$

oder, wenn wir

$$r'^2 = (\varphi(t') - x)^2 + (\psi(t') - y)^2$$

setzen,

$$\begin{aligned} r^2 = r'^2 &+ \tau^2\left[(\varphi'(t'))^2 + (\psi'(t'))^2\right] + \tau^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \\ &+ 2\tau^2(\varepsilon_1\varphi'(t') + \varepsilon_2\psi'(t')) \\ &+ 2\tau\left[(\varphi(t') - x)\varphi'(t') + (\psi(t') - y)\psi'(t')\right] \\ &+ 2\tau\left[(\varphi(t') - x)\varepsilon_1 + (\psi(t') - y)\varepsilon_2\right]. \end{aligned}$$

Hier ist, wie wir gezeigt haben,

$$(\varphi(t') - x)\varphi'(t') + (\psi(t') - y)\psi'(t') = 0$$

und

$$\varphi(t') - x = r' \cdot \cos(\overrightarrow{PC'}, x)$$
$$\psi(t') - y = r' \cdot \sin(\overrightarrow{PC'}, x),$$

also

$$r^2 = r'^2 + \tau^2(q(t'))^2 + \tau r' e_1 + \tau^2 e_2,$$

wo wir $|e_1|$ und $|e_2|$ dadurch beliebig klein machen können, daß wir $P(x, y)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von C_0 annehmen und zugleich die Punkte C auf ein hinreichend kleines Stück der Kurve um C_0 beschränken.

Da $r'^2 + \tau^2(q(t'))^2$ nie Null ist, weil $P(x, y)$ nicht auf der Kurve liegen soll, so ist:

$$r^2 = \left[r'^2 + \tau^2(q(t'))^2\right]\left[1 + \frac{\tau r' e_1 + \tau^2 e_2}{r'^2 + \tau^2(q(t'))^2}\right]$$

Bezeichnen wir mit e den größeren der beiden Beträge $|e_1|$ und $|e_2|$, so gilt von e dasselbe von $|e_1|$ und $|e_2|$, und es ist:

$$\left|\frac{\tau r' e_1 + \tau^2 e_2}{r'^2 + \tau^2(q(t'))^2}\right| < \frac{|\tau| r' + \tau^2}{c(r'^2 + \tau^2)} e,$$

wo c gleich dem Minimum m^2 von $(q(t'))^2$ oder gleich 1 ist, je nachdem $m^2 < 1$ oder $m^2 \geqq 1$ ist. Außerdem ist

$$\frac{|\tau| r' + \tau^2}{r'^2 + \tau^2} = \frac{1}{2}\frac{2|\tau| r' + 2\tau^2}{r'^2 + \tau^2} \leq \frac{1}{2}\frac{r'^2 + \tau^2 + 2\tau^2}{r'^2 + \tau^2} = 1 + 2\frac{\tau^2}{r'^2 + \tau^2} < 3$$

Wir können deshalb in der Gleichung

$$r^2 = \left[r'^2 + \tau^2(q(t'))^2\right] \cdot (1 + \varepsilon)$$

$|\varepsilon|$ in derselben Weise beliebig klein machen wie $|e_1|$ und $|e_2|$.

Beschränken wir also $P(x, y)$ und $C(a, b)$ auf eine hinreichend kleine Umgebung von $C_0(a_0, b_0)$, so besteht die Ungleichung

$$r^2 > \text{const.}\, \tau^2 = \text{const.}\, (t - t')^2.$$

Daher ist $(\tau_0 > 0)$:

$$\left| \int_{t_0-\tau_0}^{t_0+\tau_0} k\, q \log \frac{1}{r}\, dt \right| < K\, Q \left(\left| \int_0^{t'-t_0+\tau_0} \log (\text{const.}\, \tau^2)\, d\tau \right| + \left| \int_0^{t_0-t'+\tau_0} \log (\text{const.}\, \tau^2)\, d\tau \right| \right),$$

wenn $$t_0 - \tau_0 < t' < t_0 + \tau_0$$ ist.

Den Betrag der beiden letzten Integrale können wir dadurch beliebig klein machen, daß wir τ_0 unter einer bestimmten Grenze halten, und zwar für alle t', die die Ungleichung

$$t_0 - \tau_0 < t' < t_0 + \tau_0$$

erfüllen. Wie klein auch immer τ_0 sein mag, immer können wir $P(x, y)$ so nahe bei C_0 annehmen, daß der Wert t' von t, für den

$$r^2 = (\varphi(t) - x)^2 + (\psi(t) - y)^2$$

ein Minimum wird, der letzten Ungleichung genügt. Es ist also möglich, bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε auf der Kurve um den Punkt C_0 ein Stück so abzugrenzen, daß der Beitrag dieses Stücks zu dem Potential der Kurve auf alle Punkte in einer gewissen Umgebung von C_0 dem absoluten Betrage nach kleiner als ε wird. Daraus kann man in bekannter Weise schließen, daß das Potential sicher in jedem inneren Punkte der Kurve stetig ist.

Die letzten Entwicklungen gelten nicht ohne weiteres für den Fall, daß der Punkt $C_0(a_0, b_0)$ mit einem Endpunkt der Kurve zusammenfällt. Zwar hat die Funktion

$$r^2 = (\varphi(t) - x)^2 + (\psi(t) - y)^2$$

auch jetzt noch ein von Null verschiedenes Minimum, aber der Punkt C', für den r^2 das Minimum erreicht, ist nicht notwendig ein innerer Punkt der Kurve. Deshalb können wir in diesem Falle nicht die allgemeine Gültigkeit der Gleichung

$$\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)_{t=t'} = 0$$

behaupten.

Die Gleichung der Normalen im Punkte $(\varphi(T_2), \psi(T_2))$ ist:

$$(\varphi(T_2) - x)\,\varphi'(T_2) + (\psi(T_2) - y)\,\psi'(T_2) = 0.$$

Setzen wir in die linke Seite dieser Gleichung für x und y die Koordinaten irgendeines Punktes der Ebene ein, so wird sie dann und nur dann Null, wenn der Punkt auf der Normalen selbst liegt. Sie wird positiv oder negativ, je nachdem der Punkt auf der einen oder auf der anderen Seite der Normalen liegt. Wir wollen in diesem Sinne von einer positiven und einer negativen Seite der Normalen sprechen.

Für den Punkt $(a = \varphi(t), b = \psi(t))$ der Kurve lautet die linke Seite der Normalengleichung

$$(\varphi(T_2) - \varphi(t))\,\varphi'(T_2) + (\psi(T_2) - \psi(t))\,\psi'(T_2)$$

oder, da

$$\begin{aligned} \varphi(T_2) - \varphi(t) &= \tau \cdot (\varphi'(T_2) + \varepsilon_1) \\ \text{und} \qquad \psi(T_2) - \psi(t) &= \tau \cdot (\psi'(T_2) + \varepsilon_2) \end{aligned} \qquad (\tau = T_2 - t)$$

ist,

$$\begin{aligned} &\tau\left[(\varphi'(T_2) + \varepsilon_1)\,\varphi'(T_2) + (\psi'(T_2) + \varepsilon_2)\,\psi'(T_2)\right] \\ &\quad = \tau\left[(q(T_2))^2 + \varepsilon_1 \cdot \varphi'(T_2) + \varepsilon_2 \cdot \psi'(T_2)\right] \end{aligned}$$

Hier ist

$$\tau > 0 \text{ und } (q(T_2))^2 > 0.$$

Außerdem läßt sich dadurch, daß man τ hinreichend klein wählt, erreichen, daß

$$\left|\varepsilon_1 \cdot \varphi'(T_2) + \varepsilon_2 + \psi'(T_2)\right| < (q(T_2))^2$$

wird. Wir können daher an dem Ende der Kurve ein Stück so abgrenzen, daß für alle Punkte dieses Kurvenstücks jener Ausdruck positiv wird. Es verläuft also die Kurve in der Umgebung des Endpunktes auf der positiven Seite der Normalen. Nun ist:

$$r^2 = (\varphi(t) - x)^2 + (\psi(t) - y)^2$$

$$= \left[(\varphi(t) - \varphi(T_2)) + (\varphi(T_2) - x)\right]^2 + \left[(\psi(t) - \psi(T_2)) + (\psi(T_2) - y)\right]^2$$

oder, wenn wir

$$r'^2 = (\varphi(T_2) - x)^2 + (\psi(T_2) - y)^2$$

setzen,

$$\begin{aligned} r^2 = {} & r'^2 + \tau^2 \cdot (q(T_2))^2 \\ & - 2\tau \left[(\varphi(T_2) - x)\, \varphi'(T_2) + (\psi(T_2) - y)\, \psi'(T_2) \right] \\ & + \tau r' e_1 + \tau^2 e_2 \qquad \text{(siehe S. 45).} \end{aligned}$$

Nehmen wir an, der Punkt $P(x, y)$ liegt nicht auf der positiven Seite der Normalen, so ist der Ausdruck, der auf der rechten Seite in der eckigen Klammer steht, sicher nicht positiv. Es ist also

$$r'^2 + \tau^2 \cdot (q(T_2))^2 - 2\tau \left[(\varphi(T_2) - x)\, \varphi'(T_2) + (\psi(T_2) - y)\, \psi'(T_2) \right] \geqq \geqq r'^2 + \tau^2 (q(T_2))^2.$$

Da ferner r' nie Null wird, solange (x, y) nicht mit dem Endpunkt der Kurve zusammenfällt, so schließt man in bekannter Weise (siehe S. 45 f.):

$$r^2 = \left\{ r'^2 + \tau^2 (q(T_2))^2 - 2\tau \left[(\varphi(T_2) - x)\, \varphi'(T_2) + (\psi(T_2) - y)\, \psi'(T_2) \right] \right\} (1 + \varepsilon),$$

wo $|\varepsilon|$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß man τ unter einer bestimmten Grenze hält. Für hinreichend kleine τ hat man daher:

$$r^2 > \text{const.}\, \tau^2.$$

Mit Hilfe dieser Unleichung zeigt man nun, daß man an dem Ende der Kurve ein Stück derselben so abgrenzen kann, daß der Beitrag dieses Kurvenstücks zu dem Potential der Kurve auf alle diejenigen Punkte, die nicht auf der positiven Seite der Normalen liegen, dem absoluten Betrage nach unter einer beliebig kleinen Zahl bleibt (siehe S. 46).

Wir haben jetzt noch die Punkte zu untersuchen, die der positiven Seite der Normalen angehören. Für sie ist

$$(\varphi(T_2) - x)\, \varphi'(T_2) + (\psi(T_2) - y)\, \psi'(T_2) > 0.$$

Deshalb kann für diese Punkte das Minimum von r nicht

im Endpunkte der Kurve erreicht werden. Denn dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)_{t=T_2} \leqq 0 \quad \text{ist.}$$

Es wird also in einem inneren Punkte $(\varphi(t'),\ \psi(t'))$ der Kurve erreicht, so daß die Gleichung besteht:

$$(\varphi(t') - x)\,\varphi'(t') + (\psi(t') - y)\,\psi'(t') = 0.$$

Dann läßt sich aber für die Punkte, die auf der positiven Seite der Normalen liegen, dieselbe Betrachtung anstellen wie in dem Falle, wo der Punkt $C_0\,(a_0, b_0)$ ein innerer Punkt der Kurve ist.

Damit haben wir gezeigt, daß das Potential der Kurve

$$a = \varphi(t),\ b = \psi(t) \quad (T_1 \leqq t \leqq T_2)$$

in jedem Punkte der Ebene stetig ist, wenn die Dichte k der Massenbelegung als Funktion von t im Intervall (T_1, T_2) integrierbar ist.

4. Die ersten Derivierten des Potentials in den Punkten der Kurve.

Die ersten Ableitungen des Kurvenpotentials erhält man für äußere Punkte durch Differentiation unter dem Integralzeichen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{\mathfrak{C}} k\,\frac{a - x}{r^2}\,ds = \int_{T_1}^{T_2} k\,q\,\frac{a - x}{r^2}\,dt$$

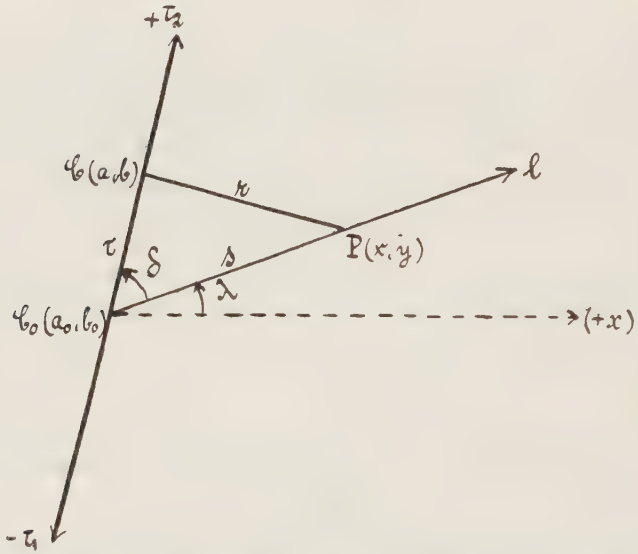
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{\mathfrak{C}} k\,\frac{b - y}{r^2}\,ds = \int_{T_1}^{T_2} k\,q\,\frac{b - y}{r^2}\,dt.$$

Die hier auftretenden Integrale existieren nicht, wenn der Punkt $P(x, y)$ auf der Kurve selbst liegt. Diesen Fall untersuchen wir zunächst bei einer Strecke, die mit Masse von der konstanten Dichte k_0 belegt ist.

a) Der Fall der Geraden.

Es ist in diesem Falle

$$u = k_0 \int_{-\tau_1}^{+\tau_2} \log \frac{1}{r}\, d\tau \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = k_0 \int_{-\tau_1}^{+\tau_2} \frac{a - x}{r^2}\, d\tau \quad (\tau_1 > 0,\ \tau_2 > 0).$$



Wir ziehen aus dem Punkte $C_0\ (a_0, b_0)$, in dem wir $\frac{\partial u}{\partial x}$ untersuchen wollen, irgendeinen nicht in die Gerade selbst fallenden Strahl l und lassen den Punkt P (x, y) auf diesem Strahl in den Punkt C_0 rücken. Der Winkel zwischen dem Strahl l und der (+ x) - Achse sei λ, der Winkel zwischen der positiven Hälfte der Geraden und dem Strahl l sei δ. Den Abstand s des Punktes P (x, y) von $C_0\ (a_0, b_0)$ wählen wir stets positiv, während der Abstand τ des Punktes C (a, b) der Geraden von $C_0\ (a_0, b_0)$ positiv oder negativ sein kann. Dann gelten die Gleichungen:

$$a - x = \tau \cdot \cos(\delta + \lambda) - s \cos\lambda$$

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 = \tau^2 - 2\,\tau\, s \cos\delta + s^2$$

für alle Punkte C (a, b) der gegebenen Geraden. Es ist also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k_0 \int_{-\tau_1}^{+\tau_2} \frac{\tau \cos(\delta + \lambda) - s \cos \lambda}{\tau^2 - 2\tau s \cos \delta + s^2} \, d\tau$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k_0 \frac{\cos(\delta + \lambda)}{2} \cdot \left(\log(\tau^2 - 2\tau s \cos \delta + s^2) \right)_{-\tau_1}^{+\tau_2} + k_0 \frac{\cos(\delta + \lambda) \cos \delta - \cos \lambda}{\sin \delta} \cdot \left(\operatorname{arc\,tgs}\left(\frac{\tau - s \cos \delta}{s \sin \delta} \right) \right)_{-\tau_1}^{+\tau_2}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k_0 \cos(\delta + \lambda)}{2} \left[\log(\tau_2^2 - 2\tau_2 s \cos \delta + s^2) - \log(\tau_1^2 + 2\tau_1 s \cos \delta + s^2) \right] - k_0 \sin(\delta + \lambda) \left[\operatorname{arc\,tgs}\left(\frac{\tau_2}{s \sin \delta} - \operatorname{cotg} \delta \right) - \operatorname{arc\,tgs}\left(\frac{-\tau_1}{s \sin \delta} - \operatorname{cotg} \delta \right) \right].$$

Lassen wir jetzt den Punkt P in den Punkt C_0 rücken, lassen wir also s gegen Null konvergieren, so konvergiert $-\frac{1}{s \sin \delta}$ gegen $(+\infty)$ oder $(-\infty)$, je nachdem δ in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten liegt, oder: je nachdem der Strahl l auf der einen oder auf der anderen Seite der gegebenen Geraden verläuft. Da ferner $\operatorname{cotg} \delta$ stets einen endlichen Wert hat, solange nicht l in die Gerade selbst fällt, so ist

$$\lim_{P = C_0} \frac{\partial u}{\partial x} = k_0 \cos(\delta + \lambda) \cdot (\log \tau_2 - \log \tau_1) \mp k_0 \pi \sin(\delta + \lambda)$$

oder, wenn wir den Winkel $(\delta + \lambda)$, den die positive Hälfte der Geraden mit der $(+x)$-Achse bildet, mit (g, x) bezeichnen,

$$\lim_{P = C_0} \frac{\partial u}{\partial x} = k_0 \cdot (\log \tau_2 - \log \tau_1) \cdot \cos(g, x) \mp k_0 \pi \sin(g, x).$$

Was von $\frac{\partial u}{\partial x}$ gilt, gilt natürlich auch von dem einseitigen Differentialquotienten von u nach einer beliebigen Richtung ϱ. Es ist daher:

$$\lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho} = k_0 \cdot (\log r_2 - \log r_1) \cdot \cos(g, \varrho) \mp k_0 \pi \sin(g, \varrho).$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der Grenzwert von $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$, solange wir auf derselben Seite der Geraden bleiben, von der Richtung des Strahles, auf dem der Punkt P (x, y) in den Punkt C_0 rückt, unabhängig ist.

Es seien nun ϱ' und ϱ'' zwei aus C_0 nach entgegengesetzten Richtungen gezogene Strahlen. Dann ist

$$\lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho'} = k_0 (\log r_2 - \log r_1) \cos(g, \varrho') \mp k_0 \pi \sin(g, \varrho')$$

$$\lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho''} = k_0 (\log r_2 - \log r_1) \cos(g, \varrho'') \pm k_0 \pi \sin(g, \varrho'').$$

Dabei ist:

$$(g, \varrho'') = \pi + (g, \varrho'),$$

also

$$\lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho''} = - k_0 (\log r_2 - \log r_1) \cdot \cos(g, \varrho') \mp k_0 \pi \sin(g, \varrho'),$$

und daher

$$\lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho'} + \lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho''} = \mp 2 k_0 \pi \sin(g, \varrho').$$

Nennen wir ν den spitzen Winkel, den die Normale der Geraden mit ϱ' oder ϱ'' bildet, so ist stets

$$\lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho'} + \lim_{P=C_0} \frac{\partial u}{\partial \varrho''} = - 2 k_0 \pi \cos \nu$$

$\frac{\partial u}{\partial \varrho'}$ konvergiert, wie wir gesehen haben, gegen einen festen Grenzwert, wenn wir den Punkt P(x, y) auf irgendeiner Geraden in den Punkt $C_0(a_0, b_0)$ rücken lassen, also auch wenn diese Bewegung auf dem Strahl ϱ' selbst erfolgt. Verstehen wir unter ϱ' zugleich die Strecke $C_0 P$, so ist u eine Funktion von ϱ', die für $\varrho' \geqq 0$, wie wir früher zeigten, stetig ist, die

außerdem für $\varrho' > 0$ einen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial \varrho'}$ besitzt. Ferner konvergiert dieser Differentialquotient mit verschwindendem ϱ' gegen einen festen Grenzwert. Dann muß u auch für $\varrho' = 0$ eine Ableitung besitzen, und zwar ist diese gleich dem Grenzwert $\lim\limits_{\varrho'=0} \frac{\partial u}{\partial \varrho'}$.

Bezeichnen wir die einseitigen Differentialquotienten von u nach ϱ' und ϱ'' im Punkte $C_0(a_0, b_0)$ mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} \text{ und } \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0},$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} = -2 k_0 \pi \cos \nu.$$

b) Der allgemeine Fall.

Die letzte Gleichung leiten wir jetzt unter gewissen Bedingungen für die mit Masse belegte Kurve ab.

Wir legen an die Kurve im Punkte $C_0(a_0 = \varphi(t_0), b_0 = \psi(t_0))$ die Tangente. Die Koordinaten ihrer Punkte können wir darstellen durch

$$\varphi(t_0) + (t - t_0)\,\varphi'(t_0),\ \psi(t_0) + (t - t_0)\,\psi'(t_0).$$

Dadurch beziehen wir gewissermaßen die Punkte C der Kurve eineindeutig auf die Punkte C′ eines Teils der Tangente.

Im folgenden setzen wir zur Abkürzung:

$$t - t_0 = \tau.$$
$$(t - t_0)\,\varphi'(t_0) = \tau \cdot \varphi'(t_0) = \alpha'.$$
$$(t - t_0)\,\psi'(t_0) = \tau \cdot \psi'(t_0) = \beta'.$$

Wir vergleichen zunächst den Abstand des Punktes P(x, y) von dem Punkte $C(\varphi(t), \psi(t))$ der Kurve mit seinem Abstand von dem entsprechenden Punkt C′ der Tangente:

$$\varphi(t_0) + \tau \cdot \varphi'(t_0),\ \psi(t_0) + \tau \cdot \psi'(t_0).$$

Es ist

$$r^2 = (\varphi(t) - x)^2 + (\psi(t) - y)^2$$
$$= (\varphi(t) - \varphi(t_0) + l_x)^2 + (\psi(t) - \psi(t_0) + l_y)^2,$$

wenn wir die Komponenten der Strecke $\vec{PC_0}$ mit l_x und l_y bezeichnen, also

$$l_x = \varphi(t_0) - x \text{ und } l_y = \psi(t_0) - y$$

setzen. Außerdem ist

$$\alpha = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \tau\,\varphi'(t_0) + \tau\,\varepsilon_1 = \alpha' + \tau\,\varepsilon_1.$$
$$\beta = \psi(t) - \psi(t_0) = \tau\,\psi'(t_0) + \tau\,\varepsilon_2 = \beta' + \tau\,\varepsilon_2,$$

wo wir die Beträge von ε_1 und ε_2 dadurch unter jede Grenze herabdrücken können, daß wir $|\tau|$ hinreichend klein wählen. Es ist also:

$$r^2 = (l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 +$$
$$+ 2\tau\,(l_x\,\varepsilon_1 + l_y\,\varepsilon_2) + 2\tau\,(\alpha'\,\varepsilon_1 + \beta'\,\varepsilon_2) + \tau^2\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$$
$$= (l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 + l\tau\,e_1 + \tau^2\,e_2.$$

wo von e_1 und e_2 dasselbe gilt wie von ε_1 und ε_2 und

$$r'^2 = (l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2$$

das Quadrat des Abstandes des Punktes $P(x, y)$ von dem dem Kurvenpunkte $C(\varphi(t), \psi(t))$ entsprechenden Punkt C' der Tangente ist.

Wir lassen $P(x, y)$ an den Kurvenpunkt $C_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ auf einer Geraden heranrücken, die nicht mit der Tangente zusammenfällt.

Nun ist (O. Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, S. 39):

$$(l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 \geq \delta\,(l^2 + \alpha'^2 + \beta'^2)$$

für alle Punkte unserer Geraden und alle Werte von t. Dabei ist δ eine von Null verschiedene, positive Konstante, die durch die Gleichung

$$|\cos\eta| = 1 - \delta$$

bestimmt wird, wo η den Winkel zwischen C_0P und C_0C' bedeutet. δ wird um so kleiner, je mehr sich die Gerade, auf

der sich $P(x, y)$ bewegt, der Tangentenrichtung nähert. Die letzte Ungleichung können wir so schreiben:

$$(l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 \geqq \delta \left[l^2 + \tau^2 (q(t_0))^2 \right].$$

Ist c die kleinere der beiden Größen δ und $\delta(q(t_0))^2$, so ist:

$$(l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 \geqq c(l^2 + \tau^2).$$

Da PC' nie Null ist, solange P von C_0 verschieden ist, so ist

$$r^2 = \left[(l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 \right] \left(1 + \frac{l\tau\, e_1 + \tau^2 e_2}{(l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2} \right).$$

Mit Hilfe der letzten Ungleichung schließt man hieraus (siehe Seite 45)

$$r^2 = r'^2 (1 + \varepsilon),$$

wo wir bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε_0 ein $\tau_0 > 0$ so finden können, daß für alle $|\tau| < \tau_0$ und alle Punkte der Geraden, auf der sich $P(x, y)$ bewegt, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ wird. Auf Grund der letzten Entwicklung dürfen wir sogar dies behaupten: Ziehen wir durch den Kurvenpunkt C_0 zwei von der Tangente verschiedene Geraden, so läßt sich für alle Punkte, die in den von diesen beiden Geraden gebildeten, die Tangente nicht enthaltenden Winkeln liegen, $|\varepsilon|$ dadurch beliebig klein machen, daß man $|\tau|$ unter einer bestimmten Grenze hält.

Aus der letzten Gleichung folgt für hinreichend kleine $|\tau|$ und alle Punkte der genannten Winkel

$$r > \text{const} \cdot r'$$

und wegen der Ungleichung

$$r'^2 \geqq c(l^2 + \tau^2) > c\tau^2$$
$$r' > \text{const} \cdot \tau \text{ und } r > \text{const} \cdot \tau.$$

Da $r > \text{const.}\, r'$

und r' sicher nicht Null ist, solange nicht $P(x, y)$ mit dem Kurvenpunkt C_0 zusammenfällt, so können wir ein positives τ_0 so angeben, daß keiner der Kurvenpunkte $(\varphi(t), \psi(t))$, für

die $|t - t_0| < \tau_0$ ist, mit einem Punkte der auf Seite 55 genannten Winkel identisch ist. Ferner können wir um den Kurvenpunkt C_0 einen Kreis so beschreiben, daß für die sämtlichen Kurvenpunkte, die innerhalb dieses Kreises liegen, $|t - t_0| < \tau_0$ ist. Es liegen dann sicher alle Punkte, für die $|t - t_0| \geq \tau_0$ ist, nicht innerhalb dieses Kreises. Danach fällt aber keiner der Punkte, die innerhalb dieses Kreises und zugleich in jenen beiden Winkeln liegen, mit einem Kurenpunkte zusammen. Das Integral

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{T_1}^{T_2} k\, q\, \frac{a - x}{r^2}\, dt$$

existiert also für alle die genannten Punkte.

Wir vergleichen jetzt das Potential eines um den Punkt $C_0(a_0, b_0)$ abgegrenzten Kurvenstücks

$$\int_{t_0 - \tau_0}^{t_0 + \tau_0} k\, q\, \frac{a - x}{r^2}\, dt = \int_{-\tau_0}^{+\tau_0} k\, q\, \frac{a_0 + \alpha - x}{r^2}\, d\tau$$

mit dem Potential des entsprechenden Stücks der Tangente in C_0, das wir uns mit Masse von der konstanten Dichte k_0 belegt denken:

$$k_0\, q_0 \int_{-\tau_0}^{+\tau_0} \frac{a_0 + \alpha' - x}{r^2}\, d\tau.$$

Hier ist wieder

$$\alpha = \varphi(t) - \varphi(t_0), \quad \beta = \psi(t) - \psi(t_0),$$
$$\alpha' = \tau\, \varphi'(t_0), \qquad \beta' = \tau\, \psi'(t_0)$$

und außerdem

$$q_0 = q(t_0), \quad k_0 = k(a_0, b_0)$$

Für die Dickte k der Massenbelegung setzen wir dies voraus:

In einer gewissen Umgebung des Kurvenpunktes $C_0(a_0, b_0)$ sei

$$|k - k_0| < A \cdot (\Delta r)^{\mu} \cdot L(\Delta r),$$

wo Δr die Entfernung des Punktes C(a, b) vom Punkte $C_0(a_0, b_0)$ bezeichnet, A und μ positive Konstanten und

$$L = |\log \Delta r|^{\nu_1} \cdot |\log^2 \Delta r|^{\nu_2} \cdot \ldots\ldots |\log^n \Delta r|^{\nu_n}$$

ist (siehe S. 20).

Aus der Gleichung

$$\Delta r = |\tau| \cdot q_0 (1 + \varepsilon) \quad \text{(siehe S. 36)}$$

folgt für hinreichend kleine $|\tau|$:

$$(\Delta r)^{\mu} < |\tau|^{\mu} \cdot (2 q_0)^{\mu},$$

$$|\log \Delta r| < \log \left(|\tau| \cdot \frac{q_0}{2} \right) < |\log \tau^2| = 2 |\log \tau|, \text{ usf.}$$

Aus der eben gemachten Voraussetzung ergibt sich daher für die Umgebung des Punktes C_0:

$$|k - k_0| < A' \cdot |\tau|^{\mu} \cdot L(|\tau|),$$

wo A' ebenfalls eine positive Konstante ist. Setzen wir

$$k = k_0 + \varepsilon,$$

so ist

$$|\varepsilon| < A' \cdot |\tau|^{\mu} \cdot L(|\tau|).$$

Für die Kurve nehmen wir die folgende Eigenschaft an: Sie läßt sich so durch zwei Gleichungen

$$a = \varphi(t), \quad b = \psi(t)$$

darstellen, daß für die Umgebung des Kurvenpunktes C_0

$$|\varphi'(t_0 + \tau) - \varphi'(t_0)| < \bar{A} \cdot |\tau|^{\bar{\mu}} \cdot \bar{L}(|\tau|)$$
$$|\psi'(t_0 + \tau) - \psi'(t_0)| < \bar{A} \cdot |\tau|^{\bar{\mu}} \cdot \bar{L}(|\tau|)$$

ist, wenn von $\bar{A}$, $\bar{\mu}$ und L dasselbe gilt wie von A, μ, L. Es soll also für hinreichend kleine $|\tau|$ in den Gleichungen

$$\varphi'(t_0 + \tau) = \varphi'(t_0) + \varepsilon_1 \text{ und } \alpha = \alpha' + \tau\, \varepsilon_1$$
$$\psi'(t_0 + \tau) = \psi'(t_0) + \varepsilon_2 \text{ und } \beta = \beta' + \tau\, \varepsilon_2$$
$$|\varepsilon_1| < A \cdot |\tau|^{\bar{\mu}} \cdot \bar{L}(|\tau|) \text{ und } |\varepsilon_2| < \bar{A} \cdot |\tau|^{\bar{\mu}} \cdot \bar{L}(|\tau|)$$

sein. Aus unseren Voraussetzungen geht hervor, daß in den Gleichungen

$$r^2 = r'^2 (1 + \varepsilon') \text{ und } kq = k_0 q_0 + \varepsilon''$$

ε' und ε'' in derselben Weise mit τ Null werden wie ε, ε_1 und ε_2.

Es ist nun:

$$k\,q\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}-k_0\,q_0\,\frac{a_0+\alpha'-x}{r'^2}=k_0\,q_0\left(\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}-\frac{a_0+\alpha'-x}{r'^2}\right)+$$

$$+\varepsilon''\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}=$$

$$=k_0\,q_0\,\frac{(a_0+\alpha'-x)+\tau\,\varepsilon_1-(1+\varepsilon')\,(a_0+\alpha'-x)}{r^2}+\varepsilon''\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}$$

$$=k_0\,q_0\left(\frac{\tau\,\varepsilon_1}{r^2}-\frac{\varepsilon'\,(a_0+\alpha'-x)}{r^2}\right)+\varepsilon''\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}.$$

Daher ist

$$\left|k\,q\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}-k_0\,q_0\,\frac{a_0+\alpha'-x}{r'^2}\right|$$

$$\leqq|k_0\,q_0|\left[\frac{|\tau|\cdot|\varepsilon_1|}{r^2}+\frac{|\varepsilon'|\cdot|a_0+\alpha'-x|}{r^2}\right]+|\varepsilon''|\,\frac{|a_0+\alpha-x|}{r^2}.$$

Hier ist

$$r>\text{const.}\,\tau,\quad r'>\text{const.}\,\tau,$$

$$\frac{|a_0+\alpha-x|}{r^2}=\frac{|a_0+\alpha-x|}{r}\cdot\frac{1}{r}\leqq\frac{1}{r}$$

$$\frac{|a_0+\alpha'-x|}{r^2}<\frac{|a_0+\alpha'-x|}{\text{const.}\,r'^2}\leqq\frac{1}{\text{const.}\,r'}$$

Dann haben wir

$$\left|k\,q\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}-k_0\,q_0\,\frac{a_0+\alpha'-x}{r'^2}\right|<\text{const.}\,\frac{e}{|\tau|},$$

wo

$$0<e<|\tau|^{\mu'}\cdot L'(|\tau|)$$

ist. Also ist

$$\left|\int_{-\tau_0}^{+\tau_0}k\,q\,\frac{a_0+\alpha-x}{r^2}\,d\tau-\int_{-\tau_0}^{+\tau_0}k_0\,q_0\,\frac{a_0+\alpha'-x}{r'^2}\,d\tau\right|<\text{const.}\int_{-\tau_0}^{+\tau_0}\frac{L'(|\tau|)}{|\tau|^{1-\mu'}}\,d\tau.$$

Das letzte Integral können wir dadurch positiv sehr klein machen, daß wir $\tau_0>0$ hinreichend klein wählen. (Dini, Grundlagen usw., S. 441.)

Wir denken uns jetzt die auf beiden Seiten beliebig begrenzte Tangente der Kurve mit Masse von der konstanten Dichte k_0 belegt. Das Potential der Kurve im Punkte (x, y) sei u, das des Tangentenstücks $\bar{u}$. Wir untersuchen die Differenz $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$. $\frac{\partial u}{\partial x}$ existiert für alle Punkte, die auf Seite 56 näher bezeichnet wurden, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ für alle Punkte, die nicht auf der Tangente liegen.

Wir grenzen um den Punkt $C_0(a_0, b_0)$ ein kleines Kurvenstück, über dessen Ausdehnung wir später noch verfügen, und das entsprechende Stück der Tangente ab.

Das Potential des abgegrenzten Stückes sei u_1 resp. $\bar{u}_1$, das des anderen Teils u_2 resp. $\bar{u}_2$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}.$$

Nach dem auf Seite 58 gewonnenen Resultat können wir bei einem noch so klein vorgegebenen, positiven ε das auf der Kurve abgegrenzte Stück (und damit das Stück der Tangente) so klein wählen, daß für alle Punkte in den auf Seite 55 bezeichneten beiden Winkeln und in einer gewissen Umgebung von C_0 (Seite 56)

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ist. Darauf können wir wegen der Stetigkeit der ersten Derivierten des logarithmischen Potentials außerhalb der Massen den Punkt $P(x, y)$ auf eine so kleine Umgebung von C_0 beschränken, daß der absolute Betrag der Schwankung von $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ wird. Es läßt sich also in den beiden Winkeln um C_0 ein Bereich so abgrenzen, daß die Schwankung von $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)$ in diesem Bereich dem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist. Daraus schließen wir, daß, wenn wir den Punkt (x, y) in den beiden Winkeln z. B. auf irgendeiner

geraden Linie in den Punkt C_0 rücken lassen, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)$ gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, und zwar auf jeder Geraden gegen denselben. Da wir nun die beiden Geraden, die die beiden Winkel einschließen, an die Tangente beliebig nahe herantreten lassen können, so konvergiert $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)$, wenn sich $P(x, y)$ auf irgendeiner von der Tangente verschiedenen Geraden in den Kurvenpunkt C_0 bewegt, immer gegen denselben Grenzwert. Andererseits wissen wir, daß der Grenzwert von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ von der Richtung des Strahles, auf dem $P(x, y)$ in den Punkt C_0 rückt, unabhängig ist, solange wir auf einer Seite der Tangente bleiben. Dies gilt deshalb auch von $\frac{\partial u}{\partial x}$. Auf analoge Weise kann man den Beweis für $\frac{\partial u}{\partial y}$ und wegen der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\varrho, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\varrho, x)$$

für $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ führen. Man schließt dann wie bei der Geraden, daß das Potential in jedem inneren Punkt der Kurve einseitige Differentialquotienten $\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)_{a_0 b_0}$ nach allen von der Tangente verschiedenen Richtungen ϱ besitzt.

Aus unseren letzten Entwicklungen folgt dann weiter, daß wir auch

$$\left| \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varrho}\right)_{a_0 b_0} - \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho}\right)_{a_0 b_0} \right|$$

dadurch beliebig klein machen können, daß wir das auf der Kurve abgegrenzte Stück hinreichend klein wählen. Es ist:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} - \varepsilon < \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} <$$
$$< \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} + \varepsilon,$$

wo $|\varepsilon|$ beliebig klein gemacht werden kann.

Da nun

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} = -2\pi k_0 \cos \nu$$

ist, so folgt

$$-2\pi k_0 \cos\nu - \varepsilon < \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} < -2\pi k_0 \cos\nu + \varepsilon.$$

Dann muß

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} = -2\pi k_0 \cos \nu$$

sein. Hier ist ν der spitze Winkel, den die Normale der Kurve im Punkte (a_0, b_0) mit ϱ' oder ϱ'' bildet. Es gilt also dieser Satz:

Es möge sich die mit Masse belegte Kurve durch zwei Gleichungen von der Form

$$a = \varphi(t), \quad b = \psi(t) \quad (T_1 \leq t < T_2)$$

so darstellen lassen, daß für die Umgebung des inneren Kurvenpunktes $(a_0 = \varphi(t_0), \; b_0 = \psi(t_0)$

$$|\varphi'(t) - \varphi'(t_0)| < \bar{A} \cdot |t - t_0|^{\mu} \cdot \bar{L}(|t - t_0|)$$
$$|\psi'(t) - \psi'(t_0)| < A \cdot |t - t_0|^{\bar{\mu}} \cdot \bar{L}(|t - t_0|)$$

ist. Ferner sei die Dichte k der Massenbelegung als Funktion von t im Intervalle (T_1, T_2) integrierbar und in der Umgebung jenes Kurvenpunktes

$$|k - k_0| < A \cdot (\Delta r)^{\mu} \cdot L(\Delta r).$$

Dann besitzt das logarithmische Potential der Kurve im Punkte (a_0, b_0) einseitige Differentialquotienten nach allen von der Tangente verschiedenen Richtungen ϱ. Außerdem ist, wenn $\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0}$ die Differentialquotienten des Potentials in

(a_0, b_0) nach den beiden entgegengesetzten Richtungen ϱ' und ϱ'' bedeuten,

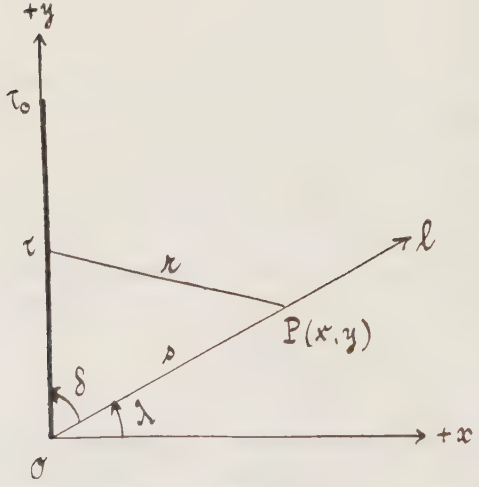
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho'}\right)_{a_0 b_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho''}\right)_{a_0 b_0} = -2\pi k_0 \cos \nu,$$

wo ν der spitze Winkel ist, den die Normale der Kurve in (a_0, b_0) mit ϱ' oder ϱ'' bildet.

5. Die ersten Derivierten des Potentials in den Endpunkten.

Um das Verhalten der ersten Differentialquotienten in den beiden Endpunkten der Kurve zu untersuchen, betrachten wir zunächst wieder den speziellen Fall einer mit Masse von der konstanten Dichte k_0 belegten Strecke.

a) Der Fall der Geraden.



Den einen Endpunkt der Strecke nehmen wir als Koordinatenanfang, die Strecke selbst als (+y)-Achse. Den Punkt P(x, y) lassen wir auf einem beliebigen, durch den Koordinatenanfang gehenden Strahl l in diesen Punkt rücken.

Es ist

$$a - x = -s \cos \lambda$$

und

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 = \tau^2 - 2\tau s \cos \delta + s^2,$$

wenn der Winkel zwischen dem Strahl l und der (+x)-Achse wieder λ und der zwischen der (+y)-Achse und l δ ist. Dabei dürfen wir stets δ zwischen 0 und π annehmen. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 s \cos\lambda \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau^2 - 2\tau s \cos\delta + s^2}$$

$$= -k_0 s \cos\lambda \cdot \frac{1}{s \sin\delta} \left(\operatorname{arc\,tgs}\left(\frac{\tau - s\cos\delta}{s\sin\delta}\right)\right)_0^{\tau_0}$$

$$= -k_0 \frac{\cos\lambda}{\sin\delta}\left[\operatorname{arc\,tgs}\left(\frac{\tau_0}{s\sin\delta} - \operatorname{cotg}\delta\right) - \operatorname{arc\,tgs}\left(-\operatorname{cotg}\delta\right)\right].$$

Da wegen $0 < \delta < \pi$ $\sin\delta > 0$ ist, so ist

$$\lim_{P=0} \frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 \frac{\cos\lambda}{\sin\delta}(\pi - \delta).$$

Ferner ist

$$\cos\lambda = +\sin\delta \text{ oder } = -\sin\delta,$$

je nachdem λ, der Winkel zwischen dem Strahl l und der $(+x)$-Achse, im ersten und vierten oder im zweiten und dritten Quadranten liegt. Daher ist

$$\lim_{P=0} \frac{\partial u}{\partial x} = -k_0(\pi - \delta) \text{ oder } = +k_0(\pi - \delta),$$

je nachdem die $(+x)$-Achse und der Strahl l auf derselben Seite der Strecke verlaufen oder nicht.

Diese Unterscheidung brauchen wir nicht mehr zu machen, wenn wir folgende Festsetzung treffen: Wir verstehen unter δ den Winkel, um den wir den Strahl l drehen müssen, um ihn mit der $(+y)$-Achse zur Deckung zu bringen, und zwar in demselben Sinne, in dem wir die $(+x)$-Achse drehen müssen, damit sie nach einer Drehung von 90^0 mit der $(+y)$-Achse zusammenfällt. Dann ist stets

$$\lim_{P=0} \frac{\partial u}{\partial x} = -k_0(\pi - \delta).$$

Der Grenzwert ist hier von der Richtung des Strahles, auf dem sich $P(x, y)$ bewegt, abhängig.

Für den Fall, daß P auf der $(+x)$- oder $(-x)$-Achse liegt, erhalten wir

$$\lim_{P=0} \frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 \frac{\pi}{2} \text{ oder } +k_0 \frac{\pi}{2}.$$

Das Potential der Strecke hat also einseitige Differentialquotienten $\left(\frac{\partial u}{\partial n'}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial n''}\right)_0$ im Endpunkt 0 nach den beiden Richtungen n′ und n″ der Normalen, und zwar ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n'}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial n''}\right)_0 = -k_0 \pi.$$

Natürlich gilt die allgemeine Formel auch dann, wenn $\delta = \pi$ wird, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ist eben stets Null, solange $P(x, y)$ auf der $(-y)$-Achse liegt. Ferner ist:

$$b - y = \tau - s \sin \lambda = \tau - s \cos \delta$$

und

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 = s^2 \sin^2 \delta + (\tau - s \cos \delta)^2,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y} = k_0 \int_0^{\tau_0} \frac{\tau - s \cos \delta}{(\tau - s \cos \delta)^2 + s^2 \sin^2 \delta} d\tau = \frac{k_0}{2} \Big(\log (\tau^2 - 2 \tau s \cos \delta + s^2) \Big)_0^{\tau_0}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k_0}{2} \Big[\log (\tau_0^2 - 2 \tau_0 s \cos \delta + s^2) - \log s^2 \Big].$$

Konvergiert s gegen Null, so wird $\frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich groß. daher auch $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ wegen der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos (\varrho, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin (\varrho, x).$$

Eine Ausnahme ist nur für $\sin (\varrho, x) = 0$ möglich.

Das Potential der mit Masse belegten Strecke besitzt also in den Endpunkten nur nach den beiden Richtungen der Normalen einseitige Differentialquotienten.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + k_0 \log s = \frac{\partial u}{\partial y} + k_0 \log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

konvergiert, wenn der Punkt P in den Endpunkt der Strecke rückt, gegen $k_0 \log \tau_0$, also gegen einen Grenzwert, der von der Richtung der Geraden, auf der sich P bewegt, unabhängig ist. Außerdem ist:

$$\lim_{P=0} \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} + k_0 \cdot \log \left(\sqrt{x^2+y^2} \right) \cdot \sin (\varrho, x) \right) = - k_0 (\pi - \delta) \cos (\varrho, x) + k_0 \sin (\varrho, x) \cdot \log \tau_0 .$$

b) Der allgemeine Fall.

Um das, was wir eben für die Gerade gefunden haben, auch für die Kurve abzuleiten, verfahren wir wie bei dem Fall eines inneren Punktes.

Wir ziehen durch den Endpunkt $((a_1 = \varphi(T_1),\ b_1 = \psi(T_1))$ der Kurve diejenige Hälfte der Tangente, die mit dem Kurvenende auf derselben Seite der Normalen liegt (siehe S. 47), und denken sie uns beliebig begrenzt und mit Masse von der konstanten Dichte $k_1 = k(a_1, b_1)$ belegt. Wir vergleichen dann die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ des Potentials der Kurve mit der Ableitung $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ des Potentials der Tangente, indem wir für den Endpunkt der Kurve dieselben Voraussetzungen machen wie in dem auf S. 61 ausgesprochenen Satze für den inneren Punkt (a_0, b_0). Dabei kann man für die Punkte (x, y), die mit dem Kurvenende auf derselben Seite der Normalen liegen, gerade so verfahren wie bei dem Beweis des eben genannten Satzes. Für alle Punkte (x, y), die auf der Normalen selbst oder auf derjenigen Seite der Normalen liegen, auf der nicht das Kurvenende verläuft, läßt sich die Ungleichung benutzen

$$(l_x + \alpha')^2 + (l_y + \beta')^2 \geqq c' (l^2 + \tau^2),$$

wo die positive Konstante c' von der Richtung der Geraden, auf der sich (x, y) in das Ende der Kurve bewegt, unabhängig ist. Man erhält die letzte Ungleichung durch Betrachtungen, die den auf S. 47 f. ähnlich sind.

Wir können nun beweisen, daß $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$

und daher auch $\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varrho}\right)$ gegen einen bestimmten, endlichen Grenzwert konvergieren, wenn der Punkt (x, y) auf irgendeinem Strahl, der von der oben näher bezeichneten Hälfte der Tangente verschieden ist, in den Endpunkt der Kurve rückt, und daß dieser Grenzwert von der Richtung des Strahles unabhängig ist. Mit Hilfe der für die mit Masse belegte Strecke gefundenen Resultate erhalten wir dann folgenden Satz:

Sind in dem Endpunkt (a_1, b_1) der Kurve dieselben Voraussetzungen erfüllt, die in dem Satze S. 61 für (a_0, b_0) gemacht wurden, so hat das Potential der Kurve in dem Endpunkte einseitige Differentialquotienten nur nach den beiden Richtungen n′ und n″ der Normalen.

Diese beiden Ableitungen $\left(\frac{\partial u}{\partial n'}\right)_{a_1 b_1}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial n''}\right)_{a_1 b_1}$ genügen der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n'}\right)_{a_1 b_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial n''}\right)_{a_1 b_1} = -k_1 \pi.$$

Die einseitigen Differentialquotienten des Potentials nach den nicht in die Normale fallenden Richtungen sind nicht endlich.

Im Falle der mit Masse belegten Strecke fanden wir (S. 64):

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\varrho, x) + \frac{k_0}{2} \cos(\varrho, y) \cdot \log\left[\left(\frac{r_0}{s}\right)^2 - 2\frac{r_0}{s}\cos\vartheta + 1\right]$$

$\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ wird also, wenn sich P(x, y) in den Punkt 0 bewegt, unendlich groß mit dem Vorzeichen von $k_0 \cos(\varrho, y)$, d. h. mit dem Zeichen von k_0 oder dem entgegengesetzten, je nachdem der Strahl, der aus 0 in der Richtung ϱ gezogen ist, mit der Strecke selbst auf derselben Seite ihrer Normalen im Punkt 0 verläuft oder nicht. Für die Kurve lautet demnach das Resultat so:

$\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ wird, wenn der Punkt (x, y) auf irgendeiner Geraden in den Endpunkt (a_1, b_1) der Kurve rückt, stets unendlich, und zwar mit dem Vorzeichen von $k(a_1, b_1)$ oder dem entgegen-

gesetzten, je nachdem der Strahl, der aus (a_1, b_1) in der Richtung ϱ gezogen ist, mit dem Kurvenende auf derselben Seite der Normalen im Punkte (a_1, b_1) verläuft oder nicht. Man erkennt dies ohne weiteres aus dem für die Strecke abgeleiteten Resultat, wenn man den Punkt (a_1, b_1) zum Koordinatenanfang und diejenige Hälfte der Kurventangente im Endpunkt $C_1(a_1, b_1)$ zur $(+y)$-Achse macht, die mit dem Kurvenende auf derselben Seite der Normalen liegt. Nimmt man das Koordinatensystem in dieser Weise an, so ergibt sich ferner:

$$\lim_{P=C_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+k_1(\pi-\delta)\right) \text{ und } \lim_{P=C_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+k_1\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$$

haben einen bestimmten endlichen Wert. der von der Richtung der Geraden, auf der sich P nach C_1 bewegt, unabhängig ist. δ hat dabei die auf S. 63 angegebene Bedeutung.

Bezeichnet man die Grenzwerte, gegen die

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}+k_1\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

konvergieren, wenn $P(x, y)$ auf der positiven Hälfte der Kurvennormalen in den Kurvenendpunkt $C_1(a_1, b_1)$ rückt, mit G_x und G_y, und ist ferner ϱ eine beliebige Richtung und l ein aus dem Kurvenendpunkt gezogener Strahl, der nicht mit der vorher näher bezeichneten Hälfte der Kurventangente zusammenfällt, so konvergiert

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho}+k_1\cdot\sin(\varrho, x)\cdot\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

wenn $P(x, y)$ auf dem Strahl l in den Kurvenendpunkt rückt, gegen den Grenzwert:

$$\left(G_x-k_1\frac{\pi}{2}+k_1\delta\right)\cdot\cos(\varrho, x)+G_y\cdot\sin(\varrho, x)$$

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor Dr. O. Hölder in Leipzig. Für diese Anregung und die mir erteilten Ratschläge spreche ich Herrn Professor Dr. O. Hölder auch an dieser Stelle meinen Dank aus.

Lebenslauf.

Ich, Carl Johannes Theodor Meyer, wurde am 4. Juli 1881 zu Ottensen als Sohn des vor 23 Jahren verstorbenen Fabrikanten Cäsar Meyer geboren. Ich bin evangelisch-lutherischer Konfession. Von Michaelis 1887 ab besuchte ich in Hamburg die Realschule zu St. Pauli, die ich Michaelis 1896 mit der Berechtigung zum einjährig-freiwilligen Dienst verließ. Nachdem ich dann während des folgenden Halbjahres Privatunterricht im Lateinischen und Griechischen erhalten hatte, trat ich in die Obersekunda des Wilhelm-Gymnasiums zu Hamburg ein. Ostern 1900 erhielt ich das Zeugnis der Reife und bezog, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren, für ein Semester die Universität Leipzig. Vom Oktober 1900 bis zum Schlusse des Wintersemesters 1901/02 war ich bei der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg immatrikuliert und vom April 1902 bis zum Oktober 1905 wiederum bei der Universität Leipzig. Im Juni 1906 bestand ich vor der Königlichen Wissenschaftlichen Prüfungskommission zu Leipzig die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Ich erhielt die Lehrbefähigung in der reinen Mathematik, der Physik und der Chemie und Mineralogie für die erste Stufe. Im August 1906 wurde ich zur Ableistung des Anleitungsjahres von der Oberschulbehörde in Hamburg zugelassen. Vom 1. Oktober 1906 bis zum 1. Oktober 1907 genügte ich meiner militärischen Dienstpflicht beim Infanterie-Regiment „Hamburg“ (2. Hanseat.) Nr. 76. Im August 1908 wurde ich in Hamburg zum Probejahr zugelassen. Zurzeit bin ich als Probekandidat an der Gelehrtenschule des Johanneums tätig.

Druck von C. Schulze & Co., G. m. b. H., Gräfenhainichen